

ОБЛАСТНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ПРОФЕССИОНАЛЬНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
«БЕЛГОРОДСКИЙ СТРОИТЕЛЬНЫЙ КОЛЛЕДЖ»

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
обучающимся по выполнению практических работ

учебной дисциплины

ЕН. 01. Математика

специальности:

08.02.01 Строительство и эксплуатация зданий и сооружений

Разработала: преподаватель математики

Н. А. Гроза

г. Белгород

ПЕРЕЧЕНЬ ПРАКТИЧЕСКИХ РАБОТ

№ п/ п	Название практического занятия	Кол- во часо в
1	ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №1 «Скалярное произведение векторов, расстояние между точками»	2
2	ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №2 «Применение векторов для решения геометрических и практических задач»	2
3	ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №3 «Определение взаимного расположения прямых и угла между ними, расстояния от точки до прямой»	2
4	ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №4 «Расчет площадей строительных конструкций»	2
5	ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №5 «Вычисление объёмов деталей строительных конструкций, определение объема земляных работ»	2
6	ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №6 «Предел функции. Непрерывность функции в точке, точки разрыва»	2
7	ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №7 «Уравнение касательной и нормали. Экстремумы функции. Наибольшего и наименьшего значений функции на отрезке»	2
8	ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №8 «Применение производной к исследованию функции и для нахождения наилучшего решения в прикладных задачах»	2
9	ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №9 «Методы вычисления неопределенных интегралов»	2
10	ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №10 «Применение определенного интеграла к вычислению площадей плоских фигур и вычислению объемов»	2
11	ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №11 «Вычисление вероятности событий. Формула полной вероятности и формула Бернулли»	2
12	ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №12 «Составление статистического распределения выборки, построение полигона и гистограммы»	2
	ИТОГО	24

Методические указания для выполнения практических работ составлены в соответствии с рабочей программой по дисциплине ЕН.01 Математика для специальности 08.02.01 Строительство и эксплуатация зданий и сооружений и является частью учебно-методического комплекса.

Всего на практические работы отводится 24 часа аудиторного времени.

Целью практических занятий является формирование учебных практических умений по математике и содействие оптимальному освоению студентами учебного материала. Выполнение студентами практических работ направлено на обобщение, систематизацию, углубление, закрепление полученных знаний по конкретным темам, формирование умений применять полученные знания на практике, формирование профессионально значимых качеств таких, как самостоятельность, ответственность, точность.

Содержание практических работ позволяет освоить:

- практические приемы вычисления, а так же выполнение измерений и связанных с ними расчетов геометрических тел и поверхностей;
- практические навыки вычисления пределов функций;
- практические навыки вычисления производной функции и применение производной;
- практические навыки вычисления определенного и неопределенного интеграла, практическое применение интеграла;
- элементы теории вероятностей и математической статистике.

В содержании каждой практической работы даны краткие теоретические сведения или формулы, примеры решения задач, и задания для самостоятельного решения по вариантам.

Ход выполнения практической работы

Практические работы необходимо выполнять в рабочих тетрадях с указанием номера, темы, целей работы.

Ход работы:

1. Познакомиться с теоретическим материалом
2. Сделать краткий конспект теоретического материала в рабочих тетрадях (основные понятия, определения, формулы, примеры)
3. Выполнить самостоятельную работу
4. Сдать преподавателю тетрадь для проверки.

Критерии оценивания практической работы

Отметка «5» ставиться, если:

- работа выполнена полностью;
- в логических рассуждениях и обосновании решения нет пробелов и ошибок;
- в решении нет математических ошибок (возможна одна неточность, описка, не являющаяся следствием незнания или непонимания учебного материала).

Отметка «4» ставится, если:

- выполнено 75-90% заданий;
- либо работа выполнена полностью, но обоснования шагов решения недостаточны;
- допущена одна ошибка или два-три недочета в выкладках, рисунках, чертежах или графиках (если эти виды работы не являются специальным объектом проверки).

Отметка «3» ставиться, если:

- выполнено 51-75% заданий;
- допущены более одной ошибки или более двух-трех недочетов в выкладках, чертежах или графиках, но учащийся владеет обязательными умениями по проверяемой теме.

Отметка «2» ставится, если:

- выполнено менее 50% заданий;
- допущены существенные ошибки, показавшие, что учащийся не владеет обязательными умениями по данной теме в полной мере.

Практическая работа 1.

Тема: Скалярное произведение векторов, расстояние между точками

Цель: Выработать практические умения на: вычисление скалярного произведения векторов, модуля вектора и угла между векторами; определение расстояния между точками и координат середины отрезка

Краткие теоретические сведения

Вектором называется направленный отрезок прямой.

1. Координаты вектора \vec{AB} , заданного двумя точками A ($x_1; y_1; z_1$) и B ($x_2; y_2; z_2$) в декартовой системе координат, вычисляются по формуле: $\vec{AB} = \{x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1\}$.

2. Длиной (модулем) вектора \vec{AB} называется число, равное длине отрезка AB: $|\vec{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$.

Для вектора заданного координатами $\vec{a}\{x, y, z\}$ модуль имеет вид: $|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

3. Векторы, лежащие на одной прямой или на параллельных прямых, называются *коллинеарными*.

Условие коллинеарности векторов: если $\vec{a} \parallel \vec{b}$, то $\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2}$

4. Векторы называются *ортогональными* (перпендикулярными), если угол между ними равен 90° .

Условие ортогональности векторов: если $\vec{a} \perp \vec{b}$, то $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

Основные операции над векторами

1. Если в ПДСК задан вектор $\vec{a}\{x, y, z\}$, то его можно разложить по координатным векторам $\vec{a} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{k}$ где $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ - координатные векторы.

Пусть даны векторы $\vec{a}\{x_1, y_1, z_1\}$ и $\vec{b}\{x_2, y_2, z_2\}$

2. сложение $\vec{a} + \vec{b} = \{x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2\}$

3. вычитание $\vec{a} - \vec{b} = \{x_1 - x_2, y_1 - y_2, z_1 - z_2\}$

4. умножение на число $k \cdot \vec{a}\{k \cdot x_1, k \cdot y_1, k \cdot z_1\}$

5. Скалярным произведением векторов - двух векторов называется число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними: $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos(\angle \vec{a}; \vec{b})$.

Если векторы заданы своими координатами $\vec{a}\{x_1, y_1, z_1\}$, $\vec{b}\{x_2, y_2, z_2\}$, то скалярное произведение равно:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2$$

Свойства скалярного произведения.

Для произвольных векторов \vec{a} , \vec{b} и \vec{c} и любого числа k справедливы следующие свойства:

1) $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$ - переместительный или *коммутативный* закон скалярного произведения.

2) $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$ - распределительный или *дистрибутивный* закон скалярного произведения. Попросту, можно раскрывать скобки.

3) $k(\vec{a} \cdot \vec{b}) = (k\vec{a}) \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot (k\vec{b})$ - сочетательный или *ассоциативный* закон скалярного произведения. Константу можно вынести из скалярного произведения.

4) $\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2$ - скалярный квадрат равен квадрату длины (модуля) вектора

6. Проекцией вектора \vec{a} на вектор \vec{b} называется число равное: $PP_{\vec{b}} \vec{a} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|}$

7. Угол между $\cos(\angle \vec{a}; \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$

Деление отрезка в данном отношении.

Пусть даны точки A($x_1; y_1; z_1$) и B($x_2; y_2; z_2$). Координаты точки M(x, y, z), лежащей на отрезке AB и делящей его в данном отношении: $\frac{AM}{MB} = \lambda$ вычисляются по формулам: $x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}$, $y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}$, $z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda}$,

В частности, при $\lambda = 1$ получаются формулы для координат середины отрезка: $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$, $y = \frac{y_1 + y_2}{2}$, $z = \frac{z_1 + z_2}{2}$,

Задания практической работы

Теоретическое задание.

Вариант 1

- Вектор – это _____ отрезок.
- Векторы, лежащие на параллельных прямых или на одной прямой, называются _____.
- Координаты суммы двух векторов равны _____ соответствующих _____ данных векторов.
- _____ векторы называются сонаправленными, если их _____ совпадают.
- Если $\vec{a} \cdot \vec{b} > 0$, то угол α между ними _____.

Вариант 2

- Длиной вектора называется _____, задающего данный вектор.
- Векторы называются компланарными, если при откладывании их _____ они _____ в одной плоскости.
- Координаты разности двух векторов равны _____ соответствующих _____ данных векторов.
- _____ векторы называются противоположно направленными, если их _____ не совпадают.
- Если угол между векторами прямой, то $\vec{a} \cdot \vec{b}$ _____.

Вариант 3

- Вектор называется нулевым, если его _____ совпадают..
- Сонаправленные векторы называются _____, если их длины равны..
- Координаты середины отрезка равны _____ соответствующих координат _____.
- Коллинеарные векторы называются _____, если их направления не совпадают.
- Если угол между векторами тупой, то $\vec{a} \cdot \vec{b}$ _____.

Расчетное задание

№1. По координатам точек А, В и С для указанных векторов найти: а) модуль вектора \vec{a} ; б) скалярное произведение векторов \vec{a} и \vec{b} ; в) проекцию вектора \vec{c} на вектор \vec{d} ; г) координаты точки М, делящей отрезок l в отношении $\alpha:\beta$.

B1.	$A(2;4;6), B(-3;5;1), C(4;-5;-4),$ $\vec{a} = -6\vec{BC} + 2\vec{BA}, \vec{b} = \vec{c} = \vec{CA}, \vec{d} = \vec{BA}, l=BC, \alpha=1, \beta=3.$	B7.	$A(-2;-3;-2), B(1;4;2), C(1,3;-3),$ $\vec{a} = 2\vec{AC} - 4\vec{BC}, \vec{b} = \vec{c} = \vec{AB}, \vec{d} = \vec{AC}, l=BC, \alpha=3, \beta=1.$
B2.	$A(6;4;5), B(-7;1;8), C(2,-2;-7),$ $\vec{a} = 5\vec{CB} - 2\vec{AC}, \vec{b} = \vec{AB}, \vec{c} = \vec{CB}, \vec{d} = \vec{AC}, l=AB, \alpha=3, \beta=2.$	B8.	$A(3;5;4), B(4;2;-3), C(-2,4;7),$ $\vec{a} = 3\vec{BA} - 4\vec{AC}, \vec{b} = \vec{AB}, \vec{c} = \vec{BA}, \vec{d} = \vec{AC}, l=BA, \alpha=2, \beta=5.$
B3.	$A(2;-4;3), B(-3;-2;4), C(0,0;-2),$ $\vec{a} = 3\vec{AC} - 4\vec{CB}, \vec{b} = \vec{c} = \vec{AB}, \vec{d} = \vec{CB}, l=AC, \alpha=2, \beta=1.$	B 9.	$A(3;4;-4), B(-2;1;2), C(2,-3;1),$ $\vec{a} = 5\vec{CB} + 4\vec{AC}, \vec{b} = \vec{c} = \vec{BA}, \vec{d} = \vec{AC}, l=BA, \alpha=2, \beta=5.$
B4.	$A(3;4;6), B(-4;6;4), C(5,-2;-3),$ $\vec{a} = -7\vec{BC} + 4\vec{CA}, \vec{b} = \vec{BA}, \vec{c} = \vec{CA}, \vec{d} = \vec{BC}, l=BA, \alpha=5, \beta=3.$	B10.	$A(4;6;7), B(2;-4;1), C(-3,-4;2),$ $\vec{a} = 5\vec{AB} - 2\vec{AC}, \vec{b} = \vec{c} = \vec{BC}, \vec{d} = \vec{AB}, l=AB, \alpha=3, \beta=4.$
B5.	$A(5;6;1), B(-2;4;-1), C(3,-3;3),$ $\vec{a} = 3\vec{AB} - 4\vec{BC}, \vec{b} = \vec{c} = \vec{AC}, \vec{d} = \vec{AB}, l=BC, \alpha=3, \beta=2.$	B 11.	$A(4;3;-2), B(-3;-1;4), C(2,2;1),$ $\vec{a} = -5\vec{AC} + 3\vec{CB}, \vec{b} = \vec{AB}, \vec{c} = \vec{AC}, \vec{d} = \vec{CB}, l=BC, \alpha=2, \beta=3.$
B6.	$A(5;4;4), B(-5;2;3), C(4,2;-5),$ $\vec{a} = 11\vec{AC} - 6\vec{AB}, \vec{b} = \vec{BC}, \vec{c} = \vec{AB}, \vec{d} = \vec{AC}, l=BC, \alpha=3, \beta=1.$	B 12.	$A(0;2;5), B(2;-3;4), C(3,2;-5),$ $\vec{a} = -3\vec{AB} + 4\vec{CB}, \vec{b} = \vec{c} = \vec{AB}, \vec{d} = \vec{AB}, l=AC, \alpha=3, \beta=2.$

№2. Найти модуль вектора заданного линейной комбинацией векторов \vec{a} и \vec{b} .

B1.	$\vec{a}\{2;0;-1\}$ и $\vec{b} = 5\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$. Найти модуль $2\vec{a} + \vec{b}$.	B7.	$\vec{a} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}$ и $\vec{b} = \vec{j} + 4\vec{k}$. Найти модуль $\vec{b} - 3\vec{a}$.
B2.	$\vec{a} = -\vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}$ и $\vec{b} = 4\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$. Найти модуль $3\vec{a} + \vec{b}$.	B8.	$\vec{a}\{1;-1;1\}$ и $\vec{b} = -5\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}$. Найти модуль $2\vec{a} + \vec{b}$.
B3.	$\vec{a} = 3\vec{i} - 2\vec{j} + 7\vec{k}$ и $\vec{b} = \vec{i} + 3\vec{k}$. Найти модуль $\vec{b} - 3\vec{a}$.	B9.	$\vec{a} = 2\vec{i} - 4\vec{j} + 2\vec{k}$ и $\vec{b} = 3\vec{i} + 5\vec{j} - 7\vec{k}$. Найти модуль $3\vec{a} - \vec{b}$.
B4.	$\vec{a}\{1;0;-1\}$ и $\vec{b} = 5\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$. Найти модуль $2\vec{a} + \vec{b}$.	B10.	$\vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - 2\vec{k}$ и $\vec{b} = 7\vec{i} - 5\vec{k}$. Найти модуль $2\vec{b} - 3\vec{a}$.
B5.	$\vec{a}\{5;4;1\}$ и $\vec{b} = 5\vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}$. Найти модуль $3\vec{a} - 2\vec{b}$.	B11.	$\vec{a}\{-2;1;3\}$ и $\vec{b} = 3\vec{i} - 6\vec{j} + 2\vec{k}$. Найти модуль $4\vec{a} + \vec{b}$.
B6.	$\vec{a} = 2\vec{i} - 4\vec{j} - 2\vec{k}$ и $\vec{b} = 7\vec{i} + \vec{j}$. Найти модуль $3\vec{a} + \vec{b}$.	B12.	$\vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - 2\vec{k}$ и $\vec{b} = -3\vec{i} + 8\vec{j}$. Найти модуль $3\vec{a} - \vec{b}$.

№3. Найти скалярное произведение векторов \vec{a} и \vec{b} .

B1.	$\vec{a} = 4\vec{p} - \vec{q}, \vec{b} = \vec{p} + 2\vec{q}, \vec{p} = 5, \vec{q} = 4, (\vec{p}, \vec{q}) = \frac{\pi}{4}$	B7.	$\vec{a} = 2\vec{p} - 3\vec{q}, \vec{b} = 5\vec{p} + \vec{q}, \vec{p} = 2, \vec{q} = 3, (\vec{p}, \vec{q}) = \frac{\pi}{2}$
B2.	$\vec{a} = 2\vec{p} + 3\vec{q}, \vec{b} = \vec{p} - 2\vec{q}, \vec{p} = 6, \vec{q} = 7, (\vec{p}, \vec{q}) = \frac{\pi}{3}$	B8.	$\vec{a} = 3\vec{p} + 2\vec{q}, \vec{b} = 2\vec{p} - \vec{q}, \vec{p} = 4, \vec{q} = 3, (\vec{p}, \vec{q}) = \frac{3\pi}{4}$
B3.	$\vec{a} = 5\vec{p} - \vec{q}, \vec{b} = \vec{p} + \vec{q}, \vec{p} = 5, \vec{q} = 3, (\vec{p}, \vec{q}) = \frac{\pi}{6}$	B9.	$\vec{a} = 6\vec{p} - \vec{q}, \vec{b} = \vec{p} + \vec{q}, \vec{p} = 3, \vec{q} = 4, (\vec{p}, \vec{q}) = \frac{\pi}{4}$
B4.	$\vec{a} = 2\vec{p} + 3\vec{q}, \vec{b} = \vec{p} - 2\vec{q}, \vec{p} = 2, \vec{q} = 3, (\vec{p}, \vec{q}) = \frac{\pi}{4}$	B10.	$\vec{a} = \vec{p} + 3\vec{q}, \vec{b} = 3\vec{p} - \vec{q}, \vec{p} = 3, \vec{q} = 5, (\vec{p}, \vec{q}) = \frac{2\pi}{3}$
B5.	$\vec{a} = 6\vec{p} - \vec{q}, \vec{b} = 5\vec{p} + \vec{q}, \vec{p} = 1/2, \vec{q} = 4, (\vec{p}, \vec{q}) = \frac{5\pi}{6}$	B11.	$\vec{a} = 2\vec{p} - 3\vec{q}, \vec{b} = 3\vec{p} + \vec{q}, \vec{p} = 4, \vec{q} = 1, (\vec{p}, \vec{q}) = \frac{\pi}{6}$
B6.	$\vec{a} = \vec{p} + 3\vec{q}, \vec{b} = \vec{p} - 2\vec{q}, \vec{p} = 2, \vec{q} = 3, (\vec{p}, \vec{q}) = \frac{\pi}{3}$	B12.	$\vec{a} = 6\vec{p} - \vec{q}, \vec{b} = \vec{p} + 2\vec{q}, \vec{p} = 8, \vec{q} = 1/2, (\vec{p}, \vec{q}) = \frac{\pi}{3}$

№4.

Коллинеарны ли векторы \vec{c}_1 и \vec{c}_2 , построенные по векторам \vec{a} и \vec{b} .

B1.	$\vec{a}\{2;-1;6\}, \vec{b}\{-1;3;8\}, \vec{c}_1=5\vec{a}-2\vec{b}, \vec{c}_2=2\vec{a}-5\vec{b}.$	B 7.	$\vec{a}\{-2;7;-1\}, \vec{b}\{-3;5;2\}, \vec{c}_1=2\vec{a}+3\vec{b}, \vec{c}_2=3\vec{a}+2\vec{b}.$
B2.	$\vec{a}\{-2;4;1\}, \vec{b}\{1;-2;7\}, \vec{c}_1=5\vec{a}+3\vec{b}, \vec{c}_2=2\vec{a}-\vec{b}.$	B 8.	$\vec{a}\{1;2;-1\}, \vec{b}\{2;-7;1\}, \vec{c}_1=6\vec{a}-2\vec{b}, \vec{c}_2=\vec{b}-3\vec{a}.$
B 3.	$\vec{a}\{1;4;-2\}, \vec{b}\{1;1;-1\}, \vec{c}_1=\vec{a}+\vec{b}, \vec{c}_2=2\vec{b}+2\vec{a}.$	B 9.	$\vec{a}\{0;3;-2\}, \vec{b}\{1;-2;1\}, \vec{c}_1=5\vec{a}-2\vec{b}, \vec{c}_2=5\vec{b}+3\vec{a}.$
B4.	$\vec{a}\{3;0;7\}, \vec{b}\{4;6;-1\}, \vec{c}_1=3\vec{a}+2\vec{b}, \vec{c}_2=5\vec{a}-7\vec{b}.$	B 10.	$\vec{a}\{1;2;-1\}, \vec{b}\{2;-7;1\}, \vec{c}_1=6\vec{a}-2\vec{b}, \vec{c}_2=\vec{b}-3\vec{a}.$
B5.	$\vec{a}\{5;0;8\}, \vec{b}\{-3;1;7\}, \vec{c}_1=3\vec{a}-4\vec{b}, \vec{c}_2=12\vec{b}-9\vec{a}.$	B 11.	$\vec{a}\{1;0;1\}, \vec{b}\{-2;3;5\}, \vec{c}_1=\vec{a}+2\vec{b}, \vec{c}_2=3\vec{a}-\vec{b}.$
B 6.	$\vec{a}\{-9;5;3\}, \vec{b}\{7;1;-2\}, \vec{c}_1=2\vec{a}-\vec{b}, \vec{c}_2=3\vec{a}+5\vec{b}.$	B 12.	$\vec{a}\{3;7;0\}, \vec{b}\{1;-3;4\}, \vec{c}_1=4\vec{a}-2\vec{b}, \vec{c}_2=\vec{b}-2\vec{a}.$

Практическая работа 2.

Тема: Геометрические приложения векторного произведения векторов для решения практических задач

Цель: закрепить понятие векторного и смешанного произведения векторов при решении практических задач.

Краткие теоретические сведения

1. Векторное произведение векторов:

Определение. Упорядоченная тройка векторов \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} называется правой, если наблюдателю, находящемуся на конце вектора \vec{c} , кратчайший поворот от \vec{a} к \vec{b} кажется происходящим против часовой стрелки. В противном случае тройка векторов левая.

Тройки компланарных векторов не относятся ни к правым, ни к левым.

Определение. Векторным произведением вектора \vec{a} на вектор \vec{b} называется третий вектор $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = [\vec{a}, \vec{b}]$ определяемый следующим образом:

- 1) длина его равна площади параллелограмма, построенного на векторах \vec{a} и \vec{b} , т.е. $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \varphi$, где φ – угол между векторами \vec{a} и \vec{b} ;
- 2) вектор \vec{c} перпендикулярен векторам \vec{a} и \vec{b} ;
- 3) векторы \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} после приведения к общему началу образуют правую тройку векторов.

Геометрическим смыслом векторного произведения векторов является площадь параллелограмма, построенного на векторах \vec{a} и \vec{b} .

Свойства векторного произведения

1. $\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a})$.
2. $\vec{a} \times \vec{b} = 0$, если или $\vec{a} = 0$, или $\vec{b} = 0$, или $\vec{a} \parallel \vec{b}$ условие коллинеарности векторов.
3. $\lambda(\vec{a} \times \vec{b}) = (\lambda\vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (\lambda\vec{b})$.
4. $(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}$.

Найдем векторное произведение векторов, заданных своими проекциями в декартовой системе координат.

Пусть два вектора $\vec{a}\{x_1, y_1, z_1\}$ и $\vec{b}\{x_2, y_2, z_2\}$ заданы своими разложениями по ортам в декартовой системе координат.

Векторное произведение векторов \vec{a} и \vec{b} можно записать в виде

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \vec{k} = (y_1 z_2 - y_2 z_1) \vec{i} - (x_1 z_2 - x_2 z_1) \vec{j} + (x_1 y_2 - x_2 y_1) \vec{k}$$

Таким образом, вектор, являющийся результатом векторного произведения векторов, заданных своими координатами, получается из определителя, в первой строке которого находятся координатные орты, а вторая и третья строки состоят, соответственно, из координат первого и второго сомножителей.

Приложения векторного произведения:

1. **Установление коллинеарности векторов:** $\vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \times \vec{b} = 0$, т.е. $\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2} = \lambda \Leftrightarrow \vec{a} \parallel \vec{b}$

2. **Нахождение площади параллелограмма и треугольника:**

$$S_{\text{параллелограмма}} = |\vec{a} \times \vec{b}|, \quad S_{\text{треугольника}} = \frac{1}{2} |\vec{a} \times \vec{b}|$$

2. Смешанное произведение векторов: определение, свойства, выражение через координаты, приложения

Определение. Смешанным произведением трех векторов \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} называется число $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$.

Геометрический смысл смешанного произведения: модуль смешанного произведения трех векторов численно равен объему параллелепипеда, построенного на этих векторах

Пусть ребрами параллелограмма являются векторы \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} образующие правую тройку векторов и вектор

Имеем $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{d} \cdot \vec{c} = |\vec{d}| \text{PR}_{\vec{d}} \vec{c}$ - произведение длины вектора \vec{d} на проекцию вектора \vec{c} на вектор \vec{d} , так как $S = |\vec{a} \times \vec{b}|$ - площадь основания построенного на векторах \vec{a} и \vec{b} , а $\text{PR}_{\vec{d}} \vec{c}$ - высота параллелограмма, то $S \cdot H = V$ - объем параллелограмма построенного на правой тройке векторов \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} . Для левой тройки $\text{PR}_{\vec{d}} \vec{c} = -H$.

Получаем, $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = S \cdot (\mp H) = \mp V$, где $|(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}| = V$ - объем параллелепипеда построенного на векторах \vec{a} , \vec{b} , \vec{c}

Свойства смешанного произведения

1. Смешанное произведение не меняется при циклической перестановке его сомножителей (не меняется ни объем параллелепипеда, ни ориентация его ребер): $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = (\vec{b} \times \vec{c}) \cdot \vec{a} = (\vec{c} \times \vec{a}) \cdot \vec{b}$.

2. Смешанное произведение не меняется при перемене знаков векторного и скалярного умножения: $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$, поэтому смешанное произведение записывают $\vec{a} \vec{b} \vec{c}$.

3. Смешанное произведение меняет свой знак при перемене любых двух вектор-сомножителей:

$$\vec{a} \vec{b} \vec{c} = -\vec{a} \vec{c} \vec{b}, \quad \vec{a} \vec{b} \vec{c} = -\vec{b} \vec{a} \vec{c}, \quad \vec{a} \vec{b} \vec{c} = -\vec{c} \vec{a} \vec{b}.$$

4. Смешанное произведение ненулевых векторов \vec{a} , \vec{b} и \vec{c} равно нулю тогда и только тогда, когда они компланарны: $\vec{a} \vec{b} \vec{c} = 0 \Leftrightarrow \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ - компланарны.

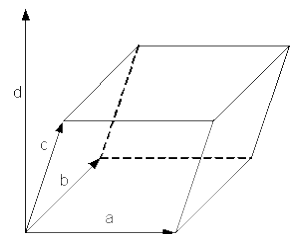
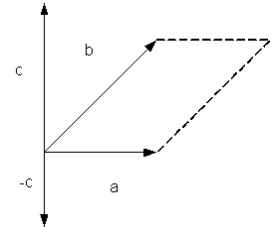
Смешанное произведение векторов, заданных своими проекциями в декартовой системе координат.

Пусть векторы заданы своими разложениями по ортам в декартовой системе координат:

$$\vec{a} = x_1 \vec{i} + y_1 \vec{j} + z_1 \vec{k}, \quad \vec{b} = x_2 \vec{i} + y_2 \vec{j} + z_2 \vec{k} \quad \text{и} \quad \vec{c} = x_3 \vec{i} + y_3 \vec{j} + z_3 \vec{k}.$$

Найдем их смешанное произведение, используя выражения в координатах для векторного и скалярного произведений:

$$\begin{aligned} (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} \cdot (x_3 \vec{i} + y_3 \vec{j} + z_3 \vec{k}) = \left(\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \vec{k} \right) \cdot (x_3 \vec{i} + y_3 \vec{j} + z_3 \vec{k}) = \\ &= \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} \cdot x_3 - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} \cdot y_3 + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \cdot z_3 = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$



Итак, $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$.

Приложения смешанного произведения:

1. Определение взаимной ориентации векторов в пространстве.

Если $\vec{a}\vec{b}\vec{c} > 0$, то \vec{a}, \vec{b} и \vec{c} – правая тройка, если $\vec{a}\vec{b}\vec{c} < 0$, то левая.

2. Установление компланарности векторов: $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \vec{a}, \vec{b}$ и \vec{c} компланарны.

3. Определение объема параллелепипеда и треугольной пирамиды (тетраэдра):

$$V_{\text{пар}} = |\vec{a}\vec{b}\vec{c}|, \quad V_{\text{пир}} = \frac{1}{6}|\vec{a}\vec{b}\vec{c}|.$$

Примеры и последовательность выполнения заданий.

Пример1. Вычислить площадь треугольника с вершинами A(2;2;2), B(4;0;3), C(0;1;0).

Решение. Найдем координаты векторов

$$\vec{AC} = \{0-2; 1-2; 0-2\} = \{-2; -1; -2\}, \quad \vec{AB} = \{4-2; 0-2; 3-2\} = \{2; -2; 1\},$$

Вычислим векторное произведение

$$\vec{AC} \times \vec{AB} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & -1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} -2 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} \vec{k} = -5\vec{i} - 2\vec{j} + 6\vec{k}$$

Найдем модуль вектора $\vec{AC} \times \vec{AB}$,

$$|\vec{AC} \times \vec{AB}| = \sqrt{25 + 4 + 36} = \sqrt{65} \Rightarrow S_{\Delta} = \frac{\sqrt{65}}{2} \text{ (кв. ед)}$$

Пример2. Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a} + 3\vec{b}$, $3\vec{a} + \vec{b}$, если $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$ и угол между векторами \vec{a} и \vec{b} равен 30° .

Решение.

$$(\vec{a} + 3\vec{b}) \times (3\vec{a} + \vec{b}) = 3\vec{a} \times \vec{a} + \vec{a} \times \vec{b} + 9\vec{b} \times \vec{a} + 3\vec{b} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a} + 9\vec{b} \times \vec{a} = 8\vec{b} \times \vec{a}, \quad S = 8|\vec{b}||\vec{a}|\sin 30^\circ = 4 \text{ (кв. ед)}$$

Пример3. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a} = 6\vec{p} - \vec{q}$, $\vec{b} = \vec{p} + 5\vec{q}$ и $|\vec{p}| = \frac{1}{2}$, $|\vec{q}| = 4$, $(\angle \vec{p}, \vec{q}) = \frac{5\pi}{6}$.

Решение.

$$S = |(6\vec{p} - \vec{q}) \times (\vec{p} + 5\vec{q})| = |6\vec{p} \times \vec{p} + 6\vec{p} \times 5\vec{q} - \vec{q} \times \vec{p} - \vec{q} \times 5\vec{q}| = |0 + 30\vec{p} \times \vec{q} - \vec{q} \times \vec{p} - 0| = |30\vec{p} \times \vec{q} + \vec{p} \times \vec{q}| = 31|\vec{p}||\vec{q}|\sin(\angle \vec{p}, \vec{q}) = 30 \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot \sin \frac{5\pi}{6} = 31 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} = 31 \text{ (кв. ед)}$$

Пример4. Компланарны ли векторы \vec{a}, \vec{b} и \vec{c} , если $\vec{a}\{7; 3; 4\}$; $\vec{b}\{-1; 2; -1\}$, $\vec{c}\{4; 2; 4\}$.

Решение. Вычислим смешанное произведение векторов:

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \begin{vmatrix} 7 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & -1 \\ 4 & 2 & 4 \end{vmatrix} = -18 \neq 0 \Rightarrow \text{векторы } \vec{a}, \vec{b} \text{ и } \vec{c} \text{ не компланарны.}$$

Пример5. Вычислить объем тетраэдра с вершинами в точках ABCD и его высоту, опущенную из вершины D на грань ABC, если A(0;-1;-1), B (-2;3;5), C(1;-5;-9), D(-1;-6;3).

Решение. Найдем координаты векторов:

$$\vec{AB} = \{-2; 4; 6\}, \quad \vec{AD} = \{-1; -5; 4\}, \quad \vec{AC} = \{1; -4; -8\}.$$

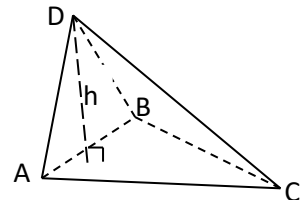
$$\text{Вычислим объем: } V_{\text{пир}} = \frac{1}{6}|\vec{a}\vec{b}\vec{c}| = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} -2 & 4 & 6 \\ 1 & -4 & -8 \\ -1 & -5 & 4 \end{vmatrix} = \frac{74}{6}.$$

Поскольку объем тетраэдра $V_{ABCD} = \frac{1}{3}S_{ABC} \cdot H$, то высота $H = \frac{3V}{S}$.

Вычислим площадь основания тетраэдра:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}|\vec{AB} \times \vec{AC}| = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & 4 & 6 \\ 1 & -4 & -8 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}|-8\vec{i} - 10\vec{j} + 4\vec{k}| = \frac{1}{2}\sqrt{64 + 100 + 16} = \frac{1}{2}\sqrt{180} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$$

$$H = \frac{3V}{S} = \frac{3 \cdot \frac{74}{6}}{3\sqrt{5}} = \frac{37}{3\sqrt{5}} - \text{высота пирамиды.}$$



Контрольные вопросы.

1. Какая тройка векторов называется правой (левой)?
2. Какое произведение векторов называется скалярным?
3. Какое произведение векторов называется векторным?
4. Какое произведение векторов называется смешанным?
5. Какое произведение векторов равно числу?
6. Какое произведение векторов результатом имеет вектор?
7. Чему равен косинус угла между векторами?
8. Как найти проекцию вектора на заданное направление зная координаты данного вектора и координаты вектора, задающего направление?
9. Как найти площадь параллелограмма?
10. Как найти площадь треугольника?
11. Чему равен объем параллелепипеда?
12. Чему равен объем треугольной пирамиды?
13. Как определить коллинеарны ли векторы?
14. Как определить компланарность векторов с помощью смешанного произведения?

Задания для практической работы .

№1. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах \vec{a} и \vec{b} .

Вариант 1.	$\vec{a} = \vec{p} + 2\vec{q}, \vec{b} = 3\vec{p} - \vec{q}; \vec{p} = 1, \vec{q} = 2; \angle(\vec{p}, \vec{q}) = \frac{\pi}{6}$
Вариант 2.	$\vec{a} = 3\vec{p} + \vec{q}, \vec{b} = \vec{p} - 2\vec{q}; \vec{p} = 4, \vec{q} = 1; \angle(\vec{p}, \vec{q}) = \frac{\pi}{4}$
Вариант 3.	$\vec{a} = \vec{p} + 3\vec{q}, \vec{b} = \vec{p} - 2\vec{q}; \vec{p} = 2, \vec{q} = 3; \angle(\vec{p}, \vec{q}) = \frac{\pi}{3}$
Вариант 4.	$\vec{a} = \vec{p} - 3\vec{q}, \vec{b} = \vec{p} + 2\vec{q}; \vec{p} = 1/5, \vec{q} = 1; \angle(\vec{p}, \vec{q}) = \frac{\pi}{2}$
Вариант 5.	$\vec{a} = 3\vec{p} - 2\vec{q}, \vec{b} = \vec{p} + 5\vec{q}; \vec{p} = 4, \vec{q} = 1/2; \angle(\vec{p}, \vec{q}) = \frac{5\pi}{6}$
Вариант 6.	$\vec{a} = 2\vec{p} - \vec{q}, \vec{b} = \vec{p} + 3\vec{q}; \vec{p} = 3, \vec{q} = 2; \angle(\vec{p}, \vec{q}) = \frac{\pi}{2}$
Вариант 7.	$\vec{a} = 2\vec{p} - 3\vec{q}, \vec{b} = 3\vec{p} + \vec{q}; \vec{p} = 4, \vec{q} = 1; \angle(\vec{p}, \vec{q}) = \frac{\pi}{6}$
Вариант 8.	$\vec{a} = 2\vec{p} + 3\vec{q}, \vec{b} = \vec{p} - 2\vec{q}; \vec{p} = 2, \vec{q} = 3; \angle(\vec{p}, \vec{q}) = \frac{\pi}{4}$
Вариант 9.	$\vec{a} = 3\vec{p} + 2\vec{q}, \vec{b} = 2\vec{p} - \vec{q}; \vec{p} = 4, \vec{q} = 3; \angle(\vec{p}, \vec{q}) = \frac{3\pi}{4}$
Вариант 10.	$\vec{a} = 6\vec{p} - \vec{q}, \vec{b} = 5\vec{p} + \vec{q}; \vec{p} = 1/2, \vec{q} = 4; \angle(\vec{p}, \vec{q}) = \frac{5\pi}{6}$
Вариант 11.	$\vec{a} = 7\vec{p} + \vec{q}, \vec{b} = \vec{p} - 3\vec{q}; \vec{p} = 3, \vec{q} = 1; \angle(\vec{p}, \vec{q}) = \frac{3\pi}{4}$
Вариант 12.	$\vec{a} = \vec{p} + 3\vec{q}, \vec{b} = 3\vec{p} + \vec{q}; \vec{p} = 2, \vec{q} = 1; \angle(\vec{p}, \vec{q}) = \frac{\pi}{3}$

№2. Выяснить, расположены ли данные точки в одной плоскости.

(замечание: необходимо доказать компланарность векторов, построенных на данных точках)

Вариант 1.	A(3; 5; 1), B(2; 4; 7), C(1; 5; 3), D(4; 4; 5)
Вариант 2.	A(1, 2, -1), B(0, 1, 5), C(-1, 2, 1), D(2, 1, 3)
Вариант 3.	A(3; -1; 2), B(1; 2; -1), C(-1; 1; -3), D(3; -5; 3)
Вариант 4.	A(3, 0, 2), B(5, 1, 9), C(6, 2, 7), D(8, 3, 14)
Вариант 5.	A(2, 0, 1), B(3, 3, 6), C(4, -1, 2), D(7, 5, -3)
Вариант 6.	A(0, 1, -1), B(2, 3, 5), C(-1, 3, -1), D(2, 2, 2)
Вариант 7.	A(-2, -13, 3), B(1, 4, 1), C(-1, -1, -4), D(0, 0, 0)
Вариант 8.	A(0, 1, 0), B(3, 4, -1), C(-2, -3, 0), D(2, 0, 3)
Вариант 9.	A(5, -1, 0), B(-2, 7, 1), C(12, -15, -7), D(1, 1, -2)
Вариант 10.	A(2, 1, 3), B(5, 3, 2), C(6, 0, -1), D(3, -2, 0)
Вариант 11.	A(3, -2, -4), B(-1, -2, 7), C(0, -1, 0), D(5, -4, -1)
Вариант 12.	A(1, 1, 6), B(4, 5, -2), C(-1, 3, 0), D(6, 1, 5)

№3. Даны координаты вершин пирамиды A, B, C, D. Сделать чертеж и найти:

- угол между ребрами AC и AB;
- площадь грани ABC;
- объем пирамиды ABCD;
- высоту, опущенную из вершины D на грань ABC.

Вариант 1.	A(4; 2; 5), B (0; 7; 2), C(0; 2; 7), D(1; 5; 0).
Вариант 2.	A(4; 4; 10), B (4; 10; 2), C(2; 8; 4), D(9; 6; 4).
Вариант 3.	A(4; 6; 5), B (6; 9; 4), C(2; 10; 10), D(7; 5; 9).
Вариант 4.	A(3; 5; 4), B(8; 7; 4), C(5; 10; 4), D(4; 7; 8).
Вариант 5.	A(7; 7; 3), B(6; 5; 8), C(3; 5; 8), D(8; 4; 1)
Вариант 6.	A(4; 4; 10), B(4; 10; 2), C(2; 8; 4), D(9; 6; 9).
Вариант 7.	A(3; 1; 4), B(-1; 6; 1), C(-1; 1; 6), (0; 4; -1).
Вариант 8.	A(0, 1, 1), B(3, 4, 4), C(-3, 9, 3), D(0, 5, 4)
Вариант 9.	A(3; 2; -2), B (1; 3; 1), C(6; 2; 0), D(0; 2; 2).
Вариант 10.	A(2; -3; 1), B (6; 1; -1), C(4; 8; -9), D(2; -1; 2).
Вариант 11.	A(0; 0; 1), B(2; 3; 5), C(6; 2; 3), D(3; 7; 2).
Вариант 12.	A(3; 3; 3), B(5; 4; 4), C(5; 6; 5), D(6; 6; 7).

Практическая работа 3.

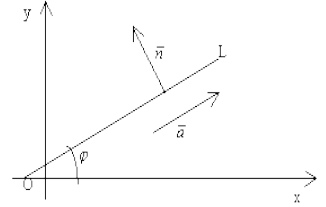
Тема: Уравнения прямой на плоскости и в пространстве. Векторы на плоскости и в пространстве.

ЦЕЛЬ: Рассмотреть формулы прямой на плоскости и в пространстве. Способствовать развитию навыков решения задач. Закрепить и систематизировать знания по теме.

Краткие теоретические сведения Уравнение прямой на плоскости

Основные понятия.

1. $Ax + By + C = 0$ - общее уравнение прямой на плоскости, $\vec{n} = \{A; B\}$ - вектор нормали.
2. $A(x-x_0) + B(y-y_0) = 0$ - уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(x_0; y_0)$ перпендикулярно вектору $\vec{n} = \{A; B\}$
3. $\frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{p}$ - каноническое уравнение прямой с направляющим вектором $\vec{a} = \{m; p\}$, проходящей через точку $M_0(x_0; y_0)$.
4. $\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1}$ - уравнение прямой, проходящей через две точки $M_1(x_1; y_1)$ и $M_2(x_2; y_2)$.
5. $y = kx + b$ - уравнение прямой с угловым коэффициентом, где k - тангенс угла наклона прямой к положительному направлению оси абсцисс.
6. угол между двумя прямыми:
 - 1) как между направляющими векторами прямых - $\cos \varphi = \frac{|\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2|}{|\vec{a}_1| \cdot |\vec{a}_2|}$,
 - 2) как угол между нормальными векторами прямых - $\cos \varphi = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|}$;
 - 3) зная угловые коэффициенты прямой - $\operatorname{tg} \varphi = \left| \frac{k_2 - k_1}{1 + k_2 \cdot k_1} \right|$.
7. угловой коэффициент может быть найден: 1) из общего уравнения прямой $k = -\frac{A}{B}$;
- 2) из канонического уравнения прямой $k = \frac{m}{p}$;
- 3) из уравнения прямой, проходящей через две точки $k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.
8. расстояние от точки $M_0(x_0; y_0)$ до данной прямой $Ax + By + C = 0$: $d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$.



Пример 1.

Даны координаты вершин некоторого треугольника ABC . Требуется найти:

- а) периметр треугольника ABC ;
- б) уравнения сторон;
- в) уравнения медианы BM ;
- г) уравнение высоты AH и вычислить ее длину;
- д) уравнение прямой, проходящей через точку A , параллельно прямой BC
- е) угол между высотой AH и медианой BM .

Исходные данные: Даны точки $A(2; 1)$, $B(-6; -2)$, $C(-3; -1)$.

Решение:

а) $P = AB + BC + AC$. При вычислении длин сторон можно воспользоваться формулами из предыдущей практической работы, учитывая, что третья координата равна нулю, тогда

$$AB = \sqrt{(2 - (-6))^2 + (1 - (-2))^2} = \sqrt{(2 + 6)^2 + (1 + 2)^2} = \sqrt{73},$$

$$AC = \sqrt{(2 - (-3))^2 + (1 - (-1))^2} = \sqrt{(2 + 3)^2 + (1 + 1)^2} = \sqrt{29},$$

$$BC = \sqrt{(-6 - (-3))^2 + (-2 - (-1))^2} = \sqrt{(-6 + 3)^2 + (-2 + 1)^2} = \sqrt{10},$$

$$P = \sqrt{73} + \sqrt{29} + \sqrt{10}.$$

б) уравнение сторон найдем как уравнение прямой, проходящей через две точки (формула 4):

$$\text{уравнение } AB: \frac{x-2}{-6-2} = \frac{y-1}{-2-1} \Rightarrow \frac{x-2}{-8} = \frac{y-1}{-3} \Rightarrow 3(x-2) = 8(y-1) \Rightarrow 3x - 8y + 2 = 0,$$

$$\text{уравнение } AC: \frac{x-2}{-3-2} = \frac{y-1}{-1-1} \Rightarrow \frac{x-2}{-5} = \frac{y-1}{-2} \Rightarrow 2(x-2) = 5(y-1) \Rightarrow 2x - 5y + 1 = 0,$$

$$\text{уравнение } BC: \frac{x+3}{-6+3} = \frac{y+1}{-2+1} \Rightarrow \frac{x+3}{-3} = \frac{y+1}{-1} \Rightarrow x + 3 = 3(y + 1) \Rightarrow x - 3y = 0.$$

в) Уравнение медианы найдем как уравнение прямой проходящей через две точки B и M (формула 4), где M - середина стороны AC .

$$\text{Координата середины отрезка } AC: x_M = \frac{2-3}{2} = -\frac{1}{2}, y_M = \frac{1-1}{2} = 0,$$

$$\text{тогда уравнение медианы } BM: \frac{x-2}{-\frac{1}{2}-2} = \frac{y-1}{0-1} \Rightarrow \frac{x-2}{-\frac{5}{2}} = \frac{y-1}{-1} \Rightarrow \frac{x-2}{2,5} = \frac{y-1}{1} \Rightarrow 1 \cdot (x-2) = 2,5 \cdot (y-1) \Rightarrow x - 2,5y + 0,5 = 0.$$

г) для высоты AH вектор $\vec{BC} = \{3; 1\}$ будет вектором нормали, тогда по формуле 2.

$$3 \cdot (x-2) + 1 \cdot (y-1) = 0 \Rightarrow 3x - 6 + y - 1 = 0 \Rightarrow 3x + y - 7 = 0.$$

Длину высоты находим как расстояние от точки $A(2; 1)$ до прямой $BC: x - 3y = 0$ (формула 8)

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|1 \cdot 2 + (-3) \cdot 1 + 0|}{\sqrt{1^2 + (-3)^2}} = \frac{1}{\sqrt{10}} \approx 0,3.$$

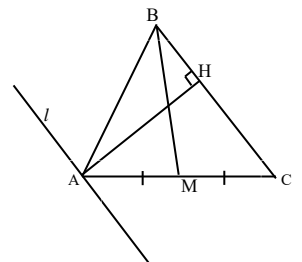
д) в этом случае вектор $\vec{BC} = \{3; 1\}$ будет направляющим вектором для искомой прямой, тогда используем формулу 3:

$$l: \frac{x-2}{3} = \frac{y-1}{1} \Rightarrow x-2 = 3(y-1) \Rightarrow x - 3y + 1 = 0.$$

е) зная общие уравнения двух прямых высоты $AH: 3x + y - 7 = 0$ и медианы $BM: x - 2,5y + 0,5 = 0$ можно найти угол

между ними по формуле 6. Для наших прямых $\vec{n}_1 = \{3; 1\}$, $\vec{n}_2 = \{1; -2,5\}$. Тогда $\cos(\widehat{AH, BM}) = \frac{3 \cdot 1 + 1 \cdot (-2,5)}{\sqrt{3^2 + 1^2} \cdot \sqrt{1^2 + (-2,5)^2}} =$

$$\frac{0,5}{\sqrt{10} \cdot \sqrt{7,25}} = \frac{0,5}{\sqrt{72,5}}$$



Ответ: а) $P = \sqrt{73} + \sqrt{29} + \sqrt{10}$; б) $AB: 3x - 8y + 2 = 0$; $AC: 2x - 5y + 1 = 0$; $BC: x - 3y = 0$, в) $BM: x - 2,5y + 0,5 = 0$, г) $AH: 3x + y - 7 = 0$; $h = 0,3$; д) $l: x - 3y + 1 = 0$, е) $\cos(\widehat{AH}, \widehat{BM}) = \frac{0,5}{\sqrt{72,5}}$

Уравнение прямой в пространстве

1. Каноническими уравнениями прямой в пространстве называются уравнения, определяющие прямую, проходящую через заданную точку коллинеарно направляющему вектору.

Пусть дана точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и направляющий вектор прямой $\vec{a} = \{m, p, n\}$.

Утверждение 2: $M(x, y, z) \in l$, то $\overrightarrow{M_0M}$ и \vec{a} коллинеарные векторы, т.е. для них выполняется условие:

$$\frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{p} = \frac{z-z_0}{n} \quad - \text{называется каноническим уравнением прямой.}$$

2. Уравнение прямой, проходящей через две точки.

Пусть в пространстве заданы две точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$, тогда уравнение прямой, проходящей через эти точки:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1}$$

Замечание: угол между прямыми в пространстве определяется аналогично углу между прямыми на плоскости.

Уравнение плоскости в пространстве

1. $Ax + By + Cz + D = 0$ - общее уравнение плоскости, с нормальным вектором $\vec{n} = \{A; B; C\}$.

2. $A(x-x_0) + B(y-y_0) + C(z-z_0) = 0$ - уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ перпендикулярно вектору $\vec{n} = \{A; B; C\}$.

3. $\alpha: \begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0$ - уравнение плоскости, проходящей через три заданные точки: $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ и $M_3(x_3, y_3, z_3)$.

4. расстояние от точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ до данной плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$: $d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$.

5. Взаимное расположение прямой и плоскости:

а) условие параллельности: вектор нормали плоскости перпендикулярен направляющему вектору прямой:

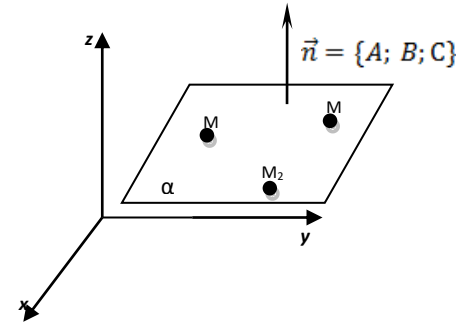
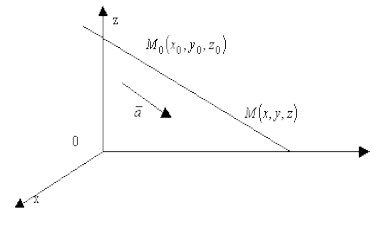
$$\vec{n} \perp \vec{a} \Rightarrow \vec{n} \cdot \vec{a} = 0 \quad - \quad Am + Bp + Cn = 0,$$

б) условие перпендикулярности: вектор нормали плоскости параллелен направляющему вектору прямой:

$$\vec{n} \parallel \vec{a} \Rightarrow \vec{n} \times \vec{a} = 0 \quad \frac{A}{m} = \frac{B}{p} = \frac{C}{n}.$$

6. Угол между прямой и плоскостью - это угол между прямой и ее проекцией на эту плоскость.

$$\sin \varphi = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{a}|}{|\vec{n}| \cdot |\vec{a}|} = \frac{|Am + Bp + Cn|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{m^2 + p^2 + n^2}}.$$



Пример 2.

Даны координаты вершин пирамиды $A(12; 11; 17)$, $B(14; 12; 14)$, $C(13; 14; 15)$, $D(12; 21; 12)$. Найти:

- 1) объем пирамиды;
- 2) площадь грани ABC ;
- 3) уравнение плоскости, проходящей через точки B, C, D ;
- 4) составить уравнение высоты пирамиды, опущенной на грань ABC и найти ее длину.

Решение.

1) Для решения задачи предварительно найдем координаты всех векторов, исходящих из точки A .

$$\overrightarrow{AB} = \{14 - 12; 12 - 11; 14 - 17\} = \{2; 1; -3\}, \quad \overrightarrow{AC} = \{13 - 12; 14 - 11; 15 - 17\} = \{1; 3; -2\}, \quad \overrightarrow{AD} = \{12 - 12; 21 - 11; 12 - 17\} = \{0; 10; -5\}.$$

Вычислим смешанное произведение:

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & 3 & -2 \\ 0 & 10 & -5 \end{vmatrix} = (2 \cdot 3 \cdot (-5) + 0 \cdot 1 \cdot (-2) + 1 \cdot 10 \cdot (-3)) - (0 \cdot 3 \cdot (-3) + 2 \cdot 10 \cdot (-2) + 1 \cdot 1 \cdot (-5)) = -60 + 45 = -15.$$

Тогда объем пирамиды равен: $V_{\text{пир}} = \frac{1}{6} |\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD}| = \frac{1}{6} |-15| = \frac{15}{6} = 2,5$.

2) Площадь грани ABC (площадь $\triangle ABC$) можно найти при помощи векторного произведения векторов \overrightarrow{AB} и \overrightarrow{AC} .

Найдем векторное произведение:

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & -3 \\ 1 & 3 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \vec{k} = (-2 + 9)\vec{i} - (-4 + 3)\vec{j} + (6 - 1)\vec{k} = 7\vec{i} + \vec{j} + 5\vec{k} = \{7; 1; 5\}.$$

Тогда площадь грани $S_{ABC} = \frac{1}{2} |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \frac{1}{2} \sqrt{7^2 + 1^2 + 5^2} = \frac{1}{2} \sqrt{49 + 1 + 25} = \frac{5}{2} \sqrt{3} \approx 4,33$.

3) Найдем уравнение плоскости, проходящей через точки B, C, D по формуле $\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0$:

Подставляем координаты точек:

$$\begin{vmatrix} x-13 & y-14 & z-15 \\ 14-13 & 12-14 & 14-15 \\ 12-13 & 21-14 & 12-15 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x-13 & y-14 & z-15 \\ 1 & -2 & -1 \\ -1 & 7 & -3 \end{vmatrix} = (x-13) \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} - (y-14) \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} + (z-15) \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 7 \end{vmatrix} \\ = (x-13)(6+7) - (y-14)(-3-1) + (z-15)(7-2) = 13(x-13) + 4(y-14) + 5(z-15) = 13x + 4y + 5z - 300 = 0$$

Получили уравнение плоскости

$$\alpha: 13x + 4y + 5z - 300 = 0.$$

4) Найдем длину высоты пирамиды, опущенной на грань ABC . Для этого найдем уравнение плоскости ABC . Тогда в качестве нормали к плоскости ABC можно выбрать вектор $\vec{n} = \{7; 1; 5\}$ (результат векторного произведения векторов \overrightarrow{AB} и \overrightarrow{AC} , так как эти вектора взаимно перпендикулярны). Уравнение плоскости примет вид:

$$7(x - x_A) + 1(y - y_A) + 5(z - z_A) = 0, \quad 7(x - 12) + 1(y - 11) + 5(z - 17) = 0, \quad 7x + y + 5z - 84 - 11 - 85 = 0,$$

$$(ABC): 7x + y + 5z - 180 = 0.$$

Длина высоты - это расстояние от вершины $D(12; 21; 12)$ до плоскости ABC : $DH = \frac{|7 \cdot 12 + 21 + 5 \cdot 12 - 180|}{\sqrt{7^2 + 1^2 + 5^2}} = \frac{15}{5\sqrt{3}} = \sqrt{3} \approx 1,73$.

Каноническое уравнение высоты найдем как уравнение прямой, проходящей через заданную точку $D(12;21;12)$ перпендикулярно к плоскости ABC . Направляющий вектор прямой, равен нормальному вектору плоскости (т.к. они перпендикулярны), т.е. $\vec{a} = \vec{n} = \{7; 1; 5\}$. Тогда каноническое уравнение высоты примет вид $DH: \frac{x-12}{7} = \frac{y-21}{1} = \frac{z-12}{5}$.

Ответ: 1) $V_{\text{пир}} = 2,5$; 2) $S_{ABC} = 4,33$; 3) $\alpha: 13x + 4y + 5z - 300 = 0$; 4) $DH = 1,73$, $DH: \frac{x-12}{7} = \frac{y-21}{1} = \frac{z-12}{5}$.

Задания для практической работы.

№1. Даны координаты вершин некоторого треугольника ABC . Сделайте чертеж в системе координат и найдите:

- уравнения сторон;
- уравнения медианы BM , проведенной из вершины B на сторону AC ;
- уравнение и длину высоты AH ;
- уравнение прямой, проходящей через точку A , параллельно прямой BC ;
- угол между высотой AH и медианой BM ;
- координаты точки пересечения высоты AH и медианы BM .

Вариант 1.	$A(4;1), B(-4;7), C(0;9)$
Вариант 2.	$A(6;2), B(-2;8), C(2;10)$
Вариант 3.	$A(8;3), B(0;9), C(4;11)$
Вариант 4.	$A(0;-1), B(3;3), C(4;1)$
Вариант 5.	$A(1;-5), B(4;-4), C(-2;-1)$
Вариант 6.	$A(-3;0), B(9;9), C(7;-5)$
Вариант 7.	$A(-5;2), B(7;-7), C(5;7)$
Вариант 8.	$A(0;3), B(12;-6), C(10;8)$
Вариант 9.	$A(1;3), B(0;-7), C(-3;5)$
Вариант 10.	$A(3;-2), B(-5;-4), C(-1;6)$
Вариант 11.	$A(2;4), B(-3;2), C(-3;-4)$
Вариант 12.	$A(-11;12), B(3;8), C(-1;6)$

№2. Даны координаты вершин пирамиды A, B, C, D . Сделайте чертеж и найдите:

- составить каноническое уравнение ребер AD, AB и AC ;
- составить уравнение грани ABC и вычислить ее площадь;
- найти угол между ребром AD и гранью ABC ;
- составить уравнение высоты пирамиды, опущенной на грань ABC и найти ее длину;
- объем пирамиды.

Вариант 1.	$A(-5;4;-7), B(-7;6;-8), C(6;2;3), D(6;-4;9)$.
Вариант 2.	$A(3;-1;5), B(4;-3;7), C(-7;10;3), D(19;-12;13)$.
Вариант 3.	$A(-4;1;-7), B(-5;3;-9), C(6;-1;4), D(12;-7;4)$.
Вариант 4.	$A(3;5;4), B(8;7;4), C(5;10;4), D(4;7;8)$.
Вариант 5.	$A(4;4;10), B(4;10;2), C(2;8;4), D(9;6;9)$.
Вариант 6.	$A(1;-4;0), B(5;0;-2), C(3;7;-10), D(1;-2;1)$.
Вариант 7.	$A(10;6;6), B(-2;8;2), C(6;8;9), D(7;10;3)$.
Вариант 8.	$A(3;0;0), B(0;-4;2), C(-1;1;-2), D(0;1;7)$.
Вариант 9.	$A(0;4;-4), B(5;1;-1), C(-1;-1;3), D(0;-3;7)$.
Вариант 10.	$A(3;2;-2), B(1;3;1), C(6;2;0), D(0;2;2)$.
Вариант 11.	$A(4;4;10), B(4;10;2), C(2;8;4), D(9;6;9)$.
Вариант 12.	$A(-2;0;-4), B(-1;7;1), C(4;-8;-4), D(1;-4;6)$.

Практическая работа 4.

Тема: Расчет площадей строительных конструкций

ЦЕЛЬ: Рассмотреть практическое применение формул площадей геометрических тел при решении задач.

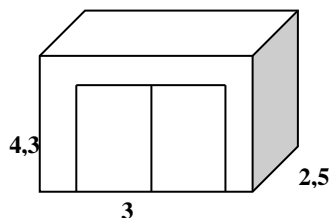
Теоретические сведения к практической работе

1. Площадь поверхности многогранника находится как сумма площадей всех его граней.
2. Площадь поверхности призмы равна: $S_{п.п} = S_{бок} + 2S_{осн}$
Площадь боковой поверхности прямой призмы равна произведению периметра основания на высоту. $S_{бок} = Ph$
3. Площадь поверхности цилиндра равна: $S_{бок} = 2\pi rh$, $S_{осн} = \pi r^2$, $S_{цил.п.п} = S_{бок} + 2S_{осн} = 2\pi rh + 2\pi r^2 = 2\pi r(r + h)$,
где r - радиус цилиндра, h - высота цилиндра
4. Площадь поверхности конуса равна: $S_{бок} = \pi rl$, $S_{осн} = \pi r^2$, $S_{кон.п.п} = S_{бок} + S_{осн} = \pi rl + \pi r^2 = \pi r(r + l)$
где r - радиус конуса, l - образующая конуса
5. Площадь поверхности усеченного конуса: $S_{бок} = \pi l(r_1 + r_2)$, $S_{ус.кон.п.п} = S_{бок} + S_{осн1} + S_{осн2}$,
где r - радиус конуса, l - образующая конуса
6. Площадь поверхности пирамиды равна: $S_{пир} = S_{бок} + S_{осн}$
7. Площадь поверхности шара (сферы): $S_{сф} = 4\pi r^2$

Примеры и последовательность выполнения заданий.

Пример 1. Необходимо оштукатурить стены и потолок гаража, размеры которого $3 \times 4,3 \times 2,3$ м толщиной 15мм. Ворота гаража имеют размеры $2,5 \times 2,2$ м. Найти объем необходимого материала.

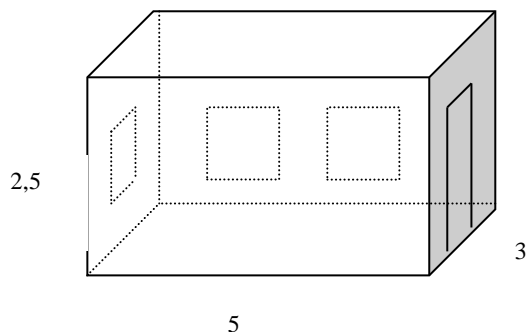
Решение: 15мм = 0,015м



1. Площадь боковой поверхности: $S_{бок} = 2(a + b) \cdot h = 2 \cdot (3 + 4,3) \cdot 2,5 = 36,5 \text{ м}^2$;
2. Площадь потолка: $S_{п.} = ab = 3 \cdot 4,3 = 12,9 \text{ м}^2$;
3. Площадь ворот: $S_{в.} = ab = 2,5 \cdot 2,2 = 5,5 \text{ м}^2$;
4. Рабочая поверхность: $S_{раб.} = S_{бок.} + S_{п.} - S_{в.} = 36,5 + 12,9 - 5,5 = 43,9 \text{ м}^2$
5. Объем материала: $V = S_{раб.} \cdot h = 43,9 \cdot 0,015 = 0,6585 \approx 0,66 \text{ м}^3$

Ответ: Потребуется $0,66 \text{ м}^3$ материала.

Пример 2. Какое количество обоев понадобится для оклейки стен комнаты данного размера: $3 \times 5 \times 2,5$ м, в которой 1 дверь размером: 1×2 м, и три окна размером $1,5 \times 2$ м? Размер обоев одного рулона $0,6 \times 10$ м.



Решение:

1. Найдём общую площадь стен: $S_{бок.пов.} = (a+b) \cdot 2 \cdot h = (3+5) \cdot 2 \cdot 2,5 = 40 \text{ м}^2$;
2. $S_{окна} = 1,5 \cdot 2 = 3 \text{ м}^2$ и $S_{двери} = 1 \cdot 2 = 2 \text{ м}^2$;
3. Найдём площадь оклеиваемой поверхности:
 $S_{окл.пов.} = S_{бок.пов.} - (3 S_{окна} + S_{двери}) = 40 - (3 \cdot 3 + 2) = 29 \text{ м}^2$;
4. $S_{рулона} = 0,6 \cdot 10 = 6 \text{ м}^2$;
5. Найдём необходимое количество рулонов:
 $N = \frac{S_{окл.пов.}}{S_{рулона}} = \frac{29}{6} \approx 4,8$ (штук)

Ответ: Достаточно 5 рулонов.

Пример 3. Облицовка плиткой стен ванной комнаты. Размер комнаты: $2,5 \times 3 \times 2,6$ м, размер двери: 1×2 м. Размер плитки: 20×30 см. Какое количество плитки понадобится, запас составляет 10%. Какую сумму вы заработаете, если за 1 м^2 вам заплатят 300 рублей. Сколько денег будет потрачено на материал, если 1 плитка стоит 160р.

Решение:

1. Найдём площадь рабочей поверхности (т.к. это стены, то площадь боковой поверхности без двери):
 $S_{бок.пов.} = (a+b) \cdot 2 \cdot h = (2,5+3) \cdot 2 \cdot 2,6 = 28,6 \text{ м}^2$; $S_{двери} = 1 \cdot 2 = 2 \text{ м}^2$; $S_{раб} = S_{бок.пов.} - S_{двери} = 28,6 - 2 = 26,6 \text{ м}^2$
2. Площадь одной плитки: $S_{двери} = 0,2 \cdot 0,3 = 0,06 \text{ м}^2$
3. Определим, сколько плиток понадобится с учетом запаса: $N = \frac{S_{раб}}{S_{пл}} \cdot 1,1 = \frac{26,6}{0,06} \cdot 1,1 \approx 443,3 \cdot 1,1 \approx 487,63 \approx 488$ штуки.
4. Вычислим заработок: $\$ = S_{раб} \cdot 300 = 26,6 \cdot 300 = 7980$ руб.
5. Вычислим стоимость плитки: $C = N \cdot 160 = 78080$ руб

Ответ: Не менее 488 штук, 7980 руб. – работа, 78080 руб. - плитка

Задания для практической работы

Задание 1. Какое количество обоев понадобится для оклейки стен комнаты данного размера: $a \times b \times c$ (м), в которой N-дверей размером: 1×2 (м), и К-окон размером $1,5 \times 2$ (м)? Размер обоев одного рулона $10 \times 1,06$ м. Сколько денег будет потрачено на обои, если рулон стоит 1560р.

Вариант	$a \times b \times c$ (м)	N	K	Вариант	$a \times b \times c$ (м)	N	K
1	$5 \times 3 \times 2,45$	1	2	7	$4,9 \times 3,3 \times 2,6$	2	1
2	$5,6 \times 3,3 \times 2,5$	2	1	8	$5 \times 3,5 \times 2,75$	1	3
3	$4 \times 3,2 \times 3$	1	1	9	$6,4 \times 3,2 \times 3,05$	2	2
4	$5,2 \times 3,4 \times 2,6$	1	2	10	$5,6 \times 3 \times 2,8$	1	2
5	$4,2 \times 2,9 \times 3,2$	2	1	11	$3,4 \times 4,2 \times 2,3$	1	1
6	$5,3 \times 4 \times 2,9$	1	3	12	$5,3 \times 3,9 \times 2,15$	2	1

Задание 2. Облицовка плиткой стен ванной комнаты. Размер комнаты: $a \times b \times c$ (м), размер двери: 1×2 м. Размер плитки: $d \times f$ (см). Какую сумму вы заработаете, если за 1 м^2 вам заплатят 400 рублей. Запас плитки составляют 10%. Сколько денег будет потрачено на материал, если 1 плитка стоит 200р.

Вариант	$a \times b \times c$ (м)	$d \times f$ (см)	Вариант	$a \times b \times c$ (м)	$d \times f$ (см)
1	$1,7 \times 1,2 \times 2,45$	20×30	7	$1,6 \times 1,5 \times 2,6$	20×30
2	$2 \times 1,5 \times 2,5$	25×35	8	$2,2 \times 1,8 \times 2,5$	25×35
3	$1,7 \times 1,52 \times 3$	40×40	9	$2 \times 2,5 \times 2,8$	40×40
4	$2,1 \times 3 \times 2,5$	60×30	10	$2,7 \times 1,5 \times 2,45$	60×30
5	$2,8 \times 1,7 \times 3$	24×36	11	$1,9 \times 1,72 \times 2,4$	24×36
6	$1,8 \times 1,7 \times 2,45$	80×60	12	$2 \times 1,8 \times 2,5$	80×60

Задание 3. Крыша имеет форму пирамиды, основание которой – прямоугольник со сторонами a и b , боковые ребра равнонаклонены к основанию под углом β . Сколько листов железа размером $0,70 \times 1,4$ м нужно для покрытия крыши, если на отходы нужно добавить 10% площади крыши?

Вариант	a	b	β	Вариант	a	b	β	Вариант	a	b	β	Вариант	a	b	β
1	5	17	30°	4	6	8	30°	7	10	34	30°	10	16	12	30°
2	9	13	45°	5	9	9	45°	8	18	26	45°	11	4,5	4,5	45°
3	8	55	60°	6	4	6	60°	9	8	12	60°	12	12	8	60°

Задание 4. Во что обойдется окраска конического шпиля здания, диаметр окружности основания которого d . Угол между образующими в осевом сечении β , окраска 1 м^2 по ЕНПР стоит 55 руб.

Вариант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
d, м	6,6	$4\sqrt{2}$	$4\sqrt{3}$	8	12	12	$2\sqrt{3}$	$12\sqrt{2}$	64	18	$8\sqrt{2}$	$3\sqrt{2}$
β	60°	90°	120°	60°	90°	120°	60°	90°	120°	60°	90°	120°

Задание 5. Рабочий оштукатуривает вручную колонну улучшенной штукатуркой. Сколько времени ему понадобится, чтобы оштукатурить колонну высотой h , диаметром d , соблюдая норму времени $k=0,79$ ч на 1 м^2 ?

Вариант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
h, м	5	4	6	2	3	4	5	3	2	6	4	3
d, м	1	1,5	0,5	1	0,6	0,5	1,2	1	1,5	1	1,5	0,5

Задача 6. Сколько краски потребуется для окраски внешней поверхности n деталей, имеющих форму усеченного конуса с диаметром оснований d_1 и d_2 и образующей L , если на 1 м^2 требуется $k=150$ гр. краски?

Вариант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
d1, см	20	15	25	25	18	22	20	12	10	16	24	16
d2, см	35	20	30	30	26	32	36	20	18	22	30	24
L, см	27	26	28	27,5	20	18	25	24	30	26	28	29
n	50	100	90	30	35	40	50	100	90	30	35	40

Задача 7. Необходимо оштукатурить стены и потолок гаража, размеры которого $a \times b \times c$ (м) толщиной h мм. Ворота гаража имеют размеры $d \times f$ (м). Найти объем необходимого материала.

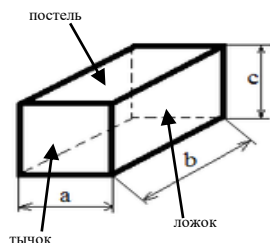
Вариант	Размер гаража, $a \times b \times c$, м	Размер ворот, $d \times f$, м	Толщина, h- мм	Вариант	Размер гаража, $a \times b \times c$, м	Размер ворот, $d \times f$, м	Толщина, h- мм
1	$5 \times 3 \times 2,5$	$2 \times 2,5$	10	7	$6 \times 3,5 \times 3$	$2,7 \times 2,5$	10
2	$4,5 \times 3 \times 3$	$2,5 \times 2,3$	12	8	$5 \times 3 \times 3$	$2 \times 2,5$	12
3	$4,8 \times 2,8 \times 2,6$	$2,7 \times 2,5$	15	9	$6 \times 8 \times 3$	$3 \times 2,6$	15
4	$5,5 \times 3,8 \times 2,5$	$2,2 \times 2$	14	10	$6 \times 4 \times 3$	$2,65 \times 2,5$	14
5	$6,5 \times 2,9 \times 2,5$	$3 \times 2,2$	13	11	$5,5 \times 3,5 \times 3$	$3 \times 2,5$	13
6	$6 \times 4,2 \times 3$	$3 \times 2,5$	11	12	$5 \times 3,5 \times 3$	$2,8 \times 2,2$	11

Практическая работа 5.

Тема: Вычисление объемов строительных элементов, конструкций, сооружений методом элементарной математики.

ЦЕЛЬ: Научить решать профессиональные задачи по нахождению объемов тел.

Теоретические сведения к практической работе



Кирпич - параллелепипед

250×120×65 мм (0,25×0,12×0,065 м) - пустотелый,

250×120×88 мм (0,25×0,12×0,088 м) - утолщенный

Объем параллелепипеда равен произведению трех его измерений: $V = a \cdot b \cdot c$,

где a – ширина, b – длина, c – высота параллелепипеда.

$V = 0,25 \cdot 0,12 \cdot 0,065 = 0,00195 \text{ м}^3$ - объем пустотелого кирпича

$V = 0,25 \cdot 0,12 \cdot 0,088 = 0,00264 \text{ м}^3$ - объем утолщенного кирпича

Примеры и последовательность выполнения заданий.

Пример 1. Определить расход пустотелого кирпича и количество раствора для кладки стены длиной 20м, высотой 5,2м, толщиной в 2,5 кирпича и площадью проема 4м².

Решение:

1. Нстены = 25см + 25см + 12см + 2см = 64см = 0,64м – толщина стены в два с половиной кирпича;
2. $S = a \cdot b = 20\text{м} \cdot 5,2\text{м} = 104\text{м}^2$ – площадь стены;
3. $S_1 = S - S_{\text{проем}} = 104\text{м}^2 - 4\text{м}^2 = 100\text{м}^2$ – площадь стены без проема;
4. $V = S_1 \cdot \text{Нстены} = 100\text{м}^2 \cdot 0,64\text{м} = 64\text{м}^3$ – объем кладки;
5. $N_{\text{раствор}} = V \cdot 20\% = 64\text{м}^3 \cdot 0,2 = 12,8\text{м}^3$ – количество раствора составляет 20 % от объема кладки;
6. $N = (V - N_{\text{раствор}}) : V_{\text{кирпича}} = 51,2\text{м}^3 : 0,00195\text{м}^3 = 26256,41\text{шт.}$, т.е. 26257 кирпичей.

Пример 2. Вычислить необходимое количество кирпича для кладки погреба размером 2×3×2 м толщиной в один кирпич (ложковой кладкой).

Решение:

1. $P = 2 \cdot (a + b) = (2 + 3) \cdot 2 = 10\text{м}$ – периметр погреба;
2. $S = P \cdot c = 10\text{м} \cdot 2\text{м} = 20\text{м}^2$ – площадь кладки;
3. $V = S \cdot 0,12 = 20\text{м}^2 \cdot 0,12\text{м} = 2,4\text{м}^3$ – объем кладки;
4. $N = 2,4\text{м}^3 : 0,00195\text{м}^3 = 1230,76\text{шт.}$, т.е. 1231 кирпич.

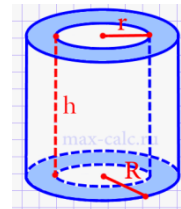
Пример 3. Определить расход кирпича для емкости для песка, если она имеет цилиндрическую форму, радиус основания 1м, высота 7м, кладка – ложковая в один кирпич.

Решение: объем цилиндра $V = \pi h R^2$. Необходимо рассчитать объем внешнего цилиндра с наружным радиусом - R, объем внутреннего цилиндра с внутренним радиус r , h - высота, π - 3,14.

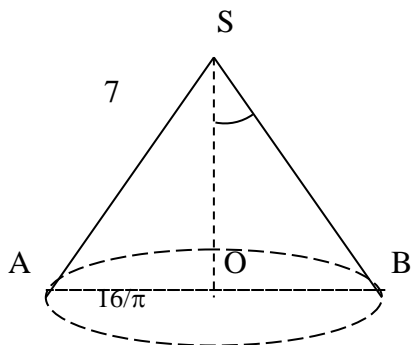
При ложковой кладке в 1 кирпич, внутренний радиус $r = R - 0,12$ (радиус круга, минус ширина кирпича)

Решение:

1. $V_1 = 3,14 \cdot 7 \cdot 1^2 = 21,98\text{м}^3$ – объем наружного цилиндра;
2. $V_2 = 3,14 \cdot (1 - 0,12)^2 \cdot 7 = 17,02\text{м}^3$ – объем внутреннего цилиндра;
3. $V = V_1 - V_2 = 21,98\text{м}^3 - 17,02\text{м}^3 = 4,96\text{м}^3$ – объем кладки;
4. $N = 4,96\text{м}^3 : 0,00195\text{м}^3 = 2543,5\text{шт.}$, т.е. 2544 кирпича.



Пример 4. На строительных площадках песок хранят в штабелях. После приемки влажный песок уложили в штабель конической формы, размеры которого оказались следующими: длина окружности основания L 32 м, длина по откосу 7 м. Определите объем принимаемого песка, учитывая скидку на влажность воздуха 15 %. (Ответ: 111,1м³)



Дано: конус

$L = 32\text{м}$

$a = 7\text{м}$

$n = 15\%$

Найти: V

Решение:

$V = 0,85 \cdot V_{\text{к}} = 0,85 \cdot 1/3 \cdot \pi R^2 \cdot H$

$L = 2\pi R = 32\text{м}$

$R = 32/2\pi = 16/\pi \approx 5,09\text{м}$

ΔASO – прямоугольный, по т. Пифагора

$H = SO = \sqrt{AS^2 - AO^2} \approx \sqrt{49 - 5,09^2} \approx \sqrt{23,1} \approx 4,8\text{м}$

$V = 0,85 \cdot 1/3 \cdot 3,14 \cdot 5,09^2 \cdot 4,8 \approx 110,64 (\text{м}^3)$

Задания для практической работы.

Задание №1. Определить расход пустотелого кирпича и количество раствора для кладки стены длиной a м, высотой b м, толщиной в R кирпича и площадью проема $S_{пр}$ м².

Вариант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$a, \text{м}$	20	15	25	18	25	22	20	12	10	16	24	16
$b, \text{м}$	3,5	5,2	4,2	3,5	2,6	3,5	4	4,5	3,2	2,5	5,5	4,5
$R, \text{кирпичей}$	2	2,5	1	1,5	2	2,5	1	1,5	2	2,5	1	1,5
$S_{пр}, \text{м}^2$	2,5	2	3	4	2,5	2	3	4	2,5	2	3	4

Задание №2. Вычислить необходимое количество утолщенного кирпича для кладки погреба размером $a \times b \times c$ м толщиной в один кирпич (ложковой кладкой).

Вариант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$a, \text{м}$	2	3	2	1,7	2	2	1,5	3	1,8	2,2	1,5	2,5
$b, \text{м}$	2	1,5	3	1,5	1,5	3	1,3	3,2	3	3	2,5	3
$c, \text{м}$	2,5	2	2,4	1,75	2	2,2	1,7	2,5	2,3	2	2	1,75

Задание №3. Определите расход кирпича, для кладки колонны, имеющей форму параллелепипеда с размерами $a \times b \times c$ м, размеры облицовочного кирпича $250 \times 125 \times 65$ мм.

Вариант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Длина $a, \text{м}$	0,3	0,2	0,51	0,38	0,36	0,365	0,38	0,64	0,3	0,24	0,37	0,365
Ширина $b, \text{м}$	0,2	0,5	0,51	0,39	0,35	0,24	0,51	0,51	0,3	0,35	0,24	0,25
Высота $c, \text{м}$	4	2	3	2	1,5	2,5	3	1,5	2,5	4	2	4

Задание №4. Определить расход уплотненного кирпича для кладки в один кирпич двух емкостей для песка, если они имеют цилиндрическую форму радиусом основания R м, высотой H м.

Вариант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Радиус основания $R, \text{м}$	1,5	1,2	1,6	2	1,8	1,4	1,3	1,7	1,9	1,1	1,25	2
Высота $H, \text{м}$	6	4	5	3	7	4,5	6	4	5	3	7	4,5

Задание №5. Рассчитать необходимое количество пустотелого кирпича для кладки шарообразного купольного свода диаметром D м, шириной кирпича 0,12 м.

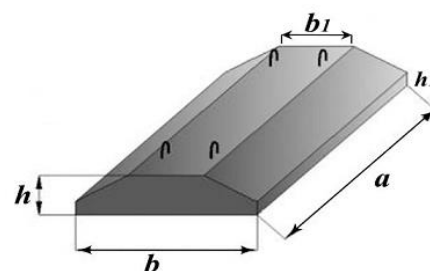
Вариант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Диаметр купола - $D, \text{м}$	5	2,5	4	6,2	3	4,6	8	5,4	6	9,4	10	7

Задание №6. На строительных площадках песок хранят в штабелях. После приемки влажный песок уложили в штабель конической формы, размеры которого оказались следующими: длина окружности основания L м, длина по откосу a м. Определите объем принимаемого песка, учитывая скидку на влажность воздуха n %.

Вариант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$L, \text{м}$	26	30	38	24	34	28	32	36	22	30	28	34
$a, \text{м}$	8	9	6	5	10	6	12	11	7	8	5	9
$n\%$	15	16	17	14	20	18	15	16	17	14	20	18

Задание №7. Определить объем бетона (м³) фундаментального блока, подушки ленточного фундамента для блока изображенного на рисунке.

Вариант	Размеры, мм				
	a	b	b_1	h	h_1
1	2380	1000	600	300	100
2	1180	2000	900	400	150
3	2380	2400	900	500	160
4	3200	1180	500	300	100
5	2800	780	400	500	200
6	1600	2380	900	400	180
7	1400	1180	400	500	100
8	1200	780	300	300	150
9	800	2000	900	500	160
10	2400	1600	600	300	100
11	900	1180	500	400	200
12	2380	1200	500	400	180



Практическая работа 6.

Тема: Предел функции. Непрерывность функции в точке, точки разрыва

ЦЕЛЬ: Научиться вычислять предел функции и последовательности различными способами, исследовать функцию на непрерывность.

Краткие теоретические сведения

Число A называется *пределом функции* $f(x)$ при $x \rightarrow a$, если для любого числа $\varepsilon > 0$ существует такое число $\delta > 0$, что для всех x , $|x - a| < \delta$ выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$. Обозначение: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$.

Правило. Чтобы вычислить $A = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$, нужно вместо переменной x поставить её предельное значение x_0 .

Если $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) = 0$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = g(x_0) = C \neq 0$, то $A = \frac{0}{C} = 0$ - бесконечно малая.

Если $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) = C \neq 0$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = g(x_0) = 0$, то $A = \frac{C}{0} = \infty$ - бесконечно большая.

Правила вычисления пределов

1. Непосредственное вычисление

Непосредственное вычисление пределов выполняется путем подстановки предельного значения аргумента в выражение функции.

Пример 1.

$$1) \lim_{x \rightarrow -2} (2x^4 - 5x^2 + x - 4) = 2 \cdot (-2)^4 - 5 \cdot (-2)^2 + (-2) - 4 = 32 - 20 - 6 = 6;$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x+2}{x^2-9} = \frac{3+2}{3^2-9} = \frac{5}{0} = \infty.$$

2. Раскрытие неопределённостей

Неопределенность вида $\left[\frac{0}{0}\right]$

1 случай: Числитель и знаменатель дроби – многочлены. В этом случае необходимо числитель и знаменатель дроби разложить на множители, сократить дробь и неопределённость исчезнет.

Пример 2.

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2-5x+6}{x^2-9} = \left[\frac{0}{0}\right] = \left[\begin{array}{l} x^2 - 5x + 6 = 0 \\ D = 25 - 24 = 1 \\ x_{1/2} = \frac{5 \pm 1}{2}, \quad x_1 = 3, x_2 = 2 \end{array} \right] = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x-2)}{(x-3)(x+3)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-2)}{(x+3)} = \frac{3-2}{3+3} = \frac{1}{6}.$$

2 случай: Имеется иррациональность. В этом случае необходимо перенести иррациональность из числителя в знаменатель или наоборот. Домножить на сопряженное.

Пример 3.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{2x+1}-3}{x-4} &= \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(\sqrt{2x+1}-3)(\sqrt{2x+1}+3)}{(x-4)(\sqrt{2x+1}+3)} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(\sqrt{2x+1})^2 - 3^2}{(x-4)(\sqrt{2x+1}+3)} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{2x+1-9}{(x-4)(\sqrt{2x+1}+3)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{2x-8}{(x-4)(\sqrt{2x+1}+3)} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{2(x-4)}{(x-4)(\sqrt{2x+1}+3)} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{2}{(\sqrt{2x+1}+3)} = \frac{2}{(\sqrt{2 \cdot 4 + 1} + 3)} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Неопределенность вида $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$

Для раскрытия неопределенности вида $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$, заданной отношением двух многочленов, числитель и знаменатель дроби делят на наивысшую из имеющихся степеней аргумента

Пример 4.

$$1) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x-8}{2x^2+3} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{7x}{x^2} - \frac{8}{x^2}}{\frac{2x^2}{x^2} + \frac{3}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{7}{x} - \frac{8}{x^2}}{2 + \frac{3}{x^2}} = \frac{0}{3} = 0;$$

$$2) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3+6x^2+7}{2x^3+x^2+x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{3x^3}{x^3} + \frac{6x^2}{x^3} + \frac{7}{x^3}}{\frac{2x^3}{x^3} + \frac{x^2}{x^3} + \frac{x}{x^3}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 + \frac{6}{x} + \frac{7}{x^3}}{2 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} = \frac{3}{2}.$$

Вычисление пределов функций с использованием замечательных пределов.

Первый замечательный предел:

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \quad 2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} = 1, \quad 3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1, \quad 4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = 1$$

Второй замечательный предел:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e \quad \text{или} \quad \lim_{y \rightarrow 0} (1 + y)^{\frac{1}{y}} = e$$

Пример 5. Вычислить $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 6x}{4x}$

Решение. В данном случае имеет место неопределенность вида $\left[\frac{0}{0}\right]$ так как при $x \rightarrow 0$ числитель и знаменатель стремятся к нулю. Для ее раскрытия воспользуемся первым замечательным пределом $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 6x}{4x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6 \cdot \sin 6x}{4 \cdot 6x} = \frac{6}{4} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 6x}{6x} = \frac{3}{2} \cdot 1 = \frac{3}{2}$$

Пример 6. Вычислить $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{\operatorname{tg} 8x}$

Решение. В данном случае имеет место неопределенность вида $\left[\frac{0}{0}\right]$ так как при $x \rightarrow 0$ числитель и знаменатель стремятся к нулю. Для ее раскрытия воспользуемся первым замечательным пределом $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ и его следствием $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1$. Таким образом, неопределенность будет раскрыта.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{\operatorname{tg} 8x} \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x \cdot \sin 4x}{4x \cdot \frac{8x \operatorname{tg} 8x}{8x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x \cdot \sin 4x}{8x \operatorname{tg} 8x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x}{8x} = \frac{1}{2}$$

Пример 7. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^{3x} = [1^\infty] = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{x/2}\right)^{x/2}\right]^6 = e^6$

Пример 8. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3+x}{3}\right)^{1/x} = [1^\infty] = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3}{3} + \frac{x}{3}\right)^{1/x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{3/x}\right)^{3/x}\right]^{1/3} = e^{1/3}$

2. Исследование функции на непрерывность

Функция $y = f(x)$ называется *непрерывной в точке $x=a$* , если существует конечный предел функции в этой точке, который равен значению функции в точке $x=a$, то есть

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

Примером непрерывной функции может служить любая элементарная функция, которая непрерывна в каждой точке своей области определения.

Если в какой-либо точке x_0 функция $y = f(x)$ не является непрерывной, то точка x_0 называется *точкой разрыва* этой функции, а функция $y = f(x)$ называется *разрывной* в этой точке.

Точки разрыва 1 рода

К *точкам разрыва I рода* относятся такие точки, в которых существуют конечные односторонние пределы:

$$\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) \text{ (левый предел) и } \lim_{x \rightarrow a+0} f(x) \text{ (правый предел).}$$

Устранимый разрыв 1-го рода если:

$$\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow a+0} f(x) \neq f(a)$$

Неустраняемый разрыв 1-го рода если:

$$\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow a+0} f(x)$$

$f(a+0) - f(a-0)$ - скачок функции $f(x)$ в точке $x=a$.

Точки разрыва 2 рода

К *точкам разрыва II рода* относятся те точки, в которых хотя бы один из односторонних пределов не существует или бесконечен.

Пример 8: Дана функция $y = \frac{x+3}{x^2-9}$. Найти точки разрыва и установить их характер.

Решение. Функция не определена в точке $x=-3$ и $x=3$, значит в этих точках разрыв. Вычислим односторонние пределы: При $x=-3$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -3-0} \frac{x+3}{x^2-9} &= \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow -3-0} \frac{x+3}{(x-3)(x+3)} = \lim_{x \rightarrow -3-0} \frac{1}{x-3} = -\frac{1}{6} \\ \lim_{x \rightarrow -3+0} \frac{x+3}{x^2-9} &= \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow -3+0} \frac{x+3}{(x-3)(x+3)} = \lim_{x \rightarrow -3+0} \frac{1}{x-3} = -\frac{1}{6} \end{aligned}$$

Итак, $\lim_{x \rightarrow -3-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow -3+0} f(x) \neq f(-3)$ значит, при $x = -3$ имеем *устраняемый разрыв I рода*.

При $x=3$

$$\lim_{x \rightarrow 3-0} \frac{x+3}{x^2-9} = \frac{6}{0} = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow 3+0} \frac{x+3}{x^2-9} = \frac{6}{0} = +\infty$$

Итак, $\lim_{x \rightarrow 3-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3+0} f(x) = \infty \neq f(3)$ значит, при $x = 3$ имеем *устраняемый разрыв II рода*.

Задания для практической работы.

Вариант 1	Вариант 2	Вариант 3	Вариант 4	Вариант 5	Вариант 6
Задание 1. Найти пределы функций.					
1. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{4x+2}{5x-1}$	1. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x-8}{4x+2}$	1. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{3x+5}{5x-1}$	1. $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{5x+2}{2x+3}$	1. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2+3x}{x^2-2}$	1. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x-2}{2x+1}$
2. $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{2x^2-11x+5}{x-5}$	2. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{x^2-x-6}$	2. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-6x+8}{x-2}$	2. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{x^2-2x-3}$	2. $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x-5}{x^2-7x+10}$	2. $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2+x-20}{x-4}$
3. $\lim_{x \rightarrow -4} \frac{x+4}{\sqrt{5-x}-3}$	3. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+7}-3}{x-2}$	3. $\lim_{x \rightarrow 6} \frac{x-6}{\sqrt{x+3}-3}$	3. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2-\sqrt{6-x}}{x-2}$	3. $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{5-x}{3-\sqrt{2x-1}}$	3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\sqrt{x+1}}{x}$
4. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^6-4x^3+x}{9-x-x^6}$	4. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^9-7x^3-2}{19+4x-2x^9}$	4. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{10}-3x^6+x}{9+x-12x^{10}}$	4. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^7-4x^3+x}{4+x-2x^7}$	4. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^4+3x^2+x}{1-5x^4}$	4. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^5+3x^3-x}{1+2x-4x^5}$
5. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3+4x-2x^3}{7x^2+6}$	5. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1+x-5x^3}{2x^7+1}$	5. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{13+7x-2x^5}{3x^4+2}$	5. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1+4x-5x^4}{3x^6-16}$	5. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1-x+2x^6}{3x^3-5}$	5. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3+2x-5x^3}{3x^4+7}$
Задание 2. Вычислите пределы функций с помощью 1 и 2 замечательных пределов					
1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{x}$	1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x}$	1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{x}$	1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 7x}{x}$	1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{x}$	1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 9x}{x}$
2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{tg 3x}$	2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 6x}{tg 5x}$	2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{tg 5x}$	2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{tg 5x}$	2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{tg 2x}$	2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{tg 3x}$
3. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2x}\right)^x$	3. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{3x}\right)^x$	3. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{4x}\right)^x$	3. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{5x}\right)^x$	3. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{6x}\right)^x$	3. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{7x}\right)^x$
4. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{2}{x}\right)^{3x}$	4. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{3}{x}\right)^{5x}$	4. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{5}{x}\right)^{2x}$	4. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{4}{x}\right)^{3x}$	4. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{3}{x}\right)^{7x}$	4. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{7}{x}\right)^{2x}$
Задание 3. Найти точки разрыва функции и исследовать их характер					
$y = \frac{x+5}{x^2-25}$	$y = \frac{x^3-8}{x-2}$	$y = \frac{x+2}{x^2-4}$	$y = \frac{x^3-1}{x+1}$	$y = \frac{14-2x}{x^2-49}$	$y = \frac{x^2-9}{x+3}$

Практическая работа 7.

Тема: Уравнение касательной и нормали. Экстремумы функции.
Наибольшего и наименьшего значений функции на отрезке

ЦЕЛЬ: Научиться применять производную к составлению уравнений касательной и нормали, нахождению экстремумов функций, наибольшего и наименьшего значения функции на отрезке.

Теоретические сведения к практической работе

1. Геометрический смысл производной

$$f'(x_0) = k = \operatorname{tg} \varphi$$

Производная функция $f(x)$ в точке M_0 равна угловому коэффициенту касательной, проведенной к графику функции $f(x)$ в этой точке.

Касательной к данной кривой в данной точке M_0 называется предельное положение секущей M_0X , когда t, X , перемещаясь по кривой, неограниченно приближается к M_0 .

Уравнение касательной к кривой: $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$

Прямая, перпендикулярная касательной к графику функции $y = f(x)$ в некоторой точке с абсциссой x_0 , называется нормалью к графику этой функции в указанной точке.

Уравнение нормали $y = f(x_0) - \frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$

2. Монотонность функции и экстремумы функции

Как возрастающие, так и убывающие функции называются монотонными, а промежутки, в которых функция возрастает или убывает, - промежутками монотонности.

Возрастание и убывание функции $y = f(x)$ характеризуется знаком ее производной:

- если в некотором промежутке $f'(x) > 0$, то функция возрастает в этом промежутке;
- если в некотором промежутке $f'(x) < 0$, то функция убывает в этом промежутке.

Точки минимума и максимума функции называются *точками экстремума* данной функции, а значения функции в этих точках - *минимумом* и *максимумом* (или *экстремумами*) функции.

Точками экстремумами могут служить только *критические точки*, т.е. точки, принадлежащие области определения функции, в которых производная или терпит разрыв.

Первое достаточное условие экстремума: Если x_0 - точка экстремума, то производная в этой точке равна нулю, т.е. $f'(x_0) = 0$

Признак максимума (минимума): Если в окрестности критической точки производная $f'(x)$ меняет знак с «+» на «-», то эта точка является *точкой максимума* (если с «-» на «+», то *точкой минимума*).

Второе достаточное условие экстремума: Если x_0 - точка экстремума, то первая производная в этой точке равна нулю, т.е. $f'(x_0) = 0$, а вторая производная $f''(x_0) \neq 0$ в точке x_0 .

Признак максимума (минимума): если $f''(x_0) < 0$, то x_0 - точка максимума; $f''(x_0) > 0$, то x_0 - точка минимума

3. Наибольшее и наименьшее значения функции, непрерывной на отрезке

Функция, непрерывная на отрезке, достигает своего наибольшего и наименьшего значений на этом отрезке либо в критических точках, принадлежащих отрезку, либо на его концах.

Схема нахождения наибольшего и наименьшего значений функции, непрерывной на отрезке

Этапы	Пример для функции $y = 2x^3 - 3x^2 - 36x + 5$ на отрезке $[0; 4]$
Найти производную $f'(x)$.	$f'(x) = 6x^2 - 6x - 36$
Найти на данном отрезке критические точки, т.е. точки, в которых $f'(x) = 0$ или не существует.	$f'(x) = 0$ при $x = -2$ и при $x = 3$. Отрезку $[0; 4]$ принадлежит только одна критическая точка: $x = 3$.
Вычислить значения функции в критических точках и на концах отрезка.	$f(0) = 5$ $f(3) = -76$ $f(4) = -59$
Из вычисленных значений выбрать наименьшее и наибольшее.	$\max_{[0;4]} f(x) = f(0) = 5$ $\min_{[0;4]} f(x) = f(3) = -76$

Примеры и последовательность выполнения заданий.

Пример 1. Написать уравнения касательной и нормали к графику функции $y = x\sqrt{x-1}$ в точке $x=2$.

Решение.

Вычислим производную заданной функции: $y' = (x\sqrt{x-1})' = x'\sqrt{x-1} + x(\sqrt{x-1})' = \sqrt{x-1} + \frac{x}{2\sqrt{x-1}} = \frac{2(x-1)+x}{2\sqrt{x-1}} = \frac{3x-2}{2\sqrt{x-1}}$

В точке $x=2$ производная равна: $y'(2) = \frac{3 \cdot 2 - 2}{2\sqrt{2-1}} = 2$

Значение самой функции в этой точке составляет $y(2) = 2 \cdot 1 = 2$.

Находим уравнение касательной: $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0), \Rightarrow y = 2 + 2(x - 2), \Rightarrow y = 2x - 2$.

Уравнение нормали в этой же точке: $y = f(x_0) - \frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0) = 2 - \frac{1}{2}(x - 2) = -\frac{x}{2} + 3$

Пример 2. Исследовать на монотонность и экстремум функцию: $f(x) = x^3 - 3x^2$

Решение: $D(f) = (-\infty, +\infty)$. Находим $f'(x) = 3x^2 - 6x$, приравняем производную к нулю, имеем $3x^2 - 6x = 0$.
Получим две критические точки $x = 0$ и $x = 2$.

Последующие рассуждения представим в таблице:

x	$-\infty < x < 0$	0	$0 < x < 2$	2	$2 < x < \infty$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	Максимум $f_{\max}(x) = f(0) = 0$	↘	Минимум $f_{\min}(x) = f(2) = -4$	↗

$$f_{\min}(x)=f(2)=3 \cdot 2^3 - 6 \cdot 2 = -4;$$

$$f_{\max}(x)=f(0)=3 \cdot 0^3 - 6 \cdot 0 = 0$$

Пример 3. Исследовать на экстремум с помощью второй производной функцию $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 6x$.

Решение: $D(f) = (-\infty, +\infty)$. Находим $f'(x) = x^2 - 5x + 6$, приравняем производную к нулю, имеем $x^2 - 5x + 6 = 0$. Получим две критические точки $x = 2$ и $x = 3$.

Находим вторую производную $f''(x) = 2x - 5$.

Вычислим значение второй производной в критических точках:

$f''(2) = 2 \cdot 2 - 5 = -1 < 0$ - $x=2$ - точка максимума, $f''(3) = 2 \cdot 3 - 5 = 1 > 0$ - $x = 3$ - точка минимума.

$$f_{\min}(x)=f(3)=\frac{1}{3} \cdot 3^3 - \frac{5}{2} \cdot 3^2 + 6 \cdot 3 = \frac{9}{2}; \quad f_{\max}(x)=f(2)=\frac{1}{3} \cdot 2^3 - \frac{5}{2} \cdot 2^2 + 6 \cdot 2 = \frac{4}{3}$$

Задания для практической работы

Вариант 1	Вариант 2	Вариант 3
Задание 1. Составить уравнение касательной и нормали к графику функции в точке x_0		
$y=3\sqrt{x+3}, \quad x_0 = 1$	$y=\frac{9}{x^2-2}, \quad x_0 = 3$	$y=\sqrt{x^2-3}, \quad x_0 = 2$
Задание 2. Найти промежутки возрастания и убывания функции, точки экстремума		
$f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x - 4$	$f(x) = x^3 + 7x^2 - 5x + 2$	$y = x^3 - 2x^2 + x - 5$
Задание 3. Найти экстремумы функции с помощью второй производной, схематично построить график		
$y=x^3+3x^2-4$	$y=0,25x^4-2x^2$	$y=3x^2-x^3$
Задание 4. Найти наименьшее и наибольшее значение функции на указанном промежутке		
$f(x) = 2x^3 - 9x^2 - 3$ на отрезке $[-1; 4]$.	$f(x) = 2x^3 + 3x^2 + 2$ на отрезке $[-2; 1]$.	$f(x) = 6x^2 - x^3$ на отрезке $[-1; 6]$.

Вариант 4	Вариант 5	Вариант 6
Задание 1. Составить уравнение касательной и нормали к графику функции в точке x_0		
$y=\frac{3}{1+x^2}, \quad x_0 = -1$	$y=6\sqrt{x} - 2x, \quad x_0 = 4$	$y=\frac{x^2}{2-x}, \quad x_0 = 3$
Задание 2. Найти промежутки возрастания и убывания функции, точки экстремума		
$f(x) = x^3 + x^2 - 8x + 1$	$f(x) = 2x^3 - x^2 - 4x + 5$	$y = -2x^3 + 15x^2 - 36x + 20$
Задание 3. Найти экстремумы функции с помощью второй производной, схематично построить график		
$y=x^4+3x^2-4$	$y=2x^2-x^4$	$y=-x^3+3x^2$
Задание 4. Найти наименьшее и наибольшее значение функции на указанном промежутке		
$f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 2$ на отрезке $[2; 5]$.	$f(x) = x^3 + 2x^2 + x + 3$ на отрезке $[1; 4]$.	$f(x) = x^3 + 3x^2 - 2$ на отрезке $[-8; -1]$.

Практическая работа 8.

Тема: Применение производной к исследованию функции и для нахождения наилучшего решения в прикладных задачах.

ЦЕЛЬ: Закрепить и обобщить умения и навыки исследования функций и построения графиков с помощью производной

Теоретические сведения к практической работе

1. Монотонность функции

Как возрастающие, так и убывающие функции называются монотонными, а промежутки, в которых функция возрастает или убывает, – *промежутками монотонности*.

Возрастание и убывание функции $y=f(x)$ характеризуется знаком ее производной:

- если в некотором промежутке $f'(x) > 0$, то функция возрастает в этом промежутке;
- если в некотором промежутке $f'(x) < 0$, то функция убывает в этом промежутке.

Правило нахождения интервалов монотонности:

1. Найти область определения функции и интервалы, на которых функция непрерывна.
2. Найти производную $f'(x)$.
3. Найти критические точки, т.е. точки, в которых производная функции равна нулю $f'(x)=0$ или не существует.
4. В каждом из интервалов, на которые область определения разбивается критическими точками, определить знак производной и характер изменения функции (с помощью достаточных условий монотонности).

2. Экстремумы функции

Точки минимума и максимума функции называются *точками экстремума* данной функции, а значения функции в этих точках – *минимумом* и *максимумом* (или *экстремумами*) функции.

Точками экстремумами могут служить только *критические точки*, т.е. точки, принадлежащие области определения функции, в которых производная или терпит разрыв.

Первое достаточное условие экстремума: Если x_0 – точка экстремума, то производная в этой точке равна нулю, т.е. $f'(x_0)=0$

Признак максимума (минимума): Если в окрестности критической точки производная $f'(x)$ меняет знак с «+» на «-», то эта точка является *точкой максимума* (если с «-» на «+», то *точкой минимума*).

Правило нахождения экстремумов функции с помощью первой производной:

1. Найти область определения функции и интервалы, на которых функция непрерывна.
2. Найти производную $f'(x)$.
3. Найти критические точки, т.е. точки, в которых производная функции равна нулю $f'(x)=0$ или не существует.
4. Установить знаки производной функции при переходе через критические точки и определить характер экстремума.
5. Вычислить значения функции $f(x)$ в каждой точке экстремума.

Второе достаточное условие экстремума: Если x_0 – точка экстремума, то первая производная в этой точке равна нулю, т.е. $f'(x_0)=0$, а вторая производная $f''(x_0) \neq 0$ в точке x_0 .

Признак максимума (минимума): если $f''(x_0) < 0$, то x_0 – *точка максимума*; $f''(x_0) > 0$, то x_0 – *точка минимума*

Правило нахождения экстремумов функции с помощью второй производной:

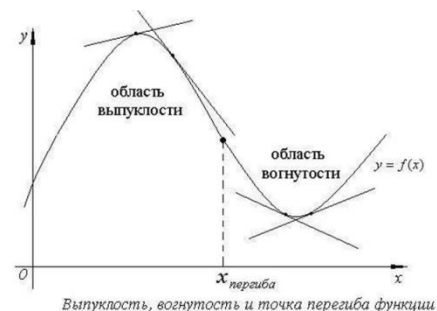
1. Найти область определения функции и интервалы, на которых функция непрерывна.
2. Найти первую производную $f'(x)$.
3. Найти критические точки, т.е. точки, в которых производная функции равна нулю $f'(x)=0$ или не существует.
4. Найти вторую производную $f''(x)$.
5. Вычислить значения функции второй производной $f''(x)$ в каждой критической точке и сделать вывод о характере экстремума.
6. Вычислить значения функции $f(x)$ в каждой точке экстремума.

3. Вогнутость и выпуклость функции. Точки перегиба.

Функция называется *выпуклой* (*вогнутой*) на некотором интервале $(a;b)$, если касательная, проведенная к графику функции в каждой точке этого интервала, лежит выше (ниже) графика функции.

Точки, отделяющие участки выпуклости от участков вогнутости функции, называются ее *точками перегиба*.

Необходимое условие существования точек перегиба. В критических точках 2-го рода вторая производная функции либо равна нулю, либо не существует.



Для дальнейшего исследования критические точки 2-го рода помещают на числовую ось, которая делится этими точками на интервалы, после чего проверяют выполнение следующих достаточных условий.

Достаточное условие выпуклости и вогнутости функции. Если на некотором интервале $(a;b)$ функция $f(x)$ дважды дифференцируема и при этом ее вторая производная $f''(x) > 0$ - то функция *вогнута*, если $f''(x) < 0$ - *выпукла*.

Правило нахождения интервалов выпуклости графика функции и точек перегиба:

1. Найти вторую производную $f''(x)$ и точки, в которых она равна нулю или не существует (критические точки 2-го рода).
2. Определить интервалы, на которые область определения функции разбивается найденными точками.
3. Установить знаки второй производной на каждом интервале и делают вывод о выпуклости функции.
4. Определить изменение знака второй производной $f''(x)$ при переходе через критические точки 2-го рода. Изменение знака указывает на наличие точек перегиба.
5. Найти значение функции в точке перегиба.

План исследования графика функции

1. Найти область определения функции.
2. Найти область непрерывности функции и точки разрыва. Определить характер точек разрыва.
3. Найти нули функции (точки пересечения с координатными осями).
4. Установить, не является ли график функции симметричным относительно какой-нибудь прямой (или координатной оси) или точки, т.е. проверить, является функция четной, или нечетной, или ни той и ни другой.
5. Проверить функцию на периодичность.
6. Найти промежутки монотонности и экстремумы.
7. Найти промежутки выпуклости и точки перегиба.
8. Найти несколько дополнительных значений функции.
9. Построить график.

Контрольные вопросы:

1. Какие точки называются точками экстремума (максимума и минимума) функции?
2. Какая функция называется возрастающей (убывающей)?
3. Каковы необходимые и достаточные условия существования точек экстремума функции?
4. В чем состоит достаточное условие возрастания (убывания) функции?
5. Какие точки называются точками перегиба функции?
6. Какая функция называется выпуклой (вогнутой)?
7. Каковы необходимые и достаточные условия существования точек перегиба функции?
8. В чем состоит достаточное условие выпуклости (вогнутости) функции?

Примеры и последовательность выполнения заданий.

Пример 1. Найти промежутки монотонности следующих функций:

а) $f(x) = x^2 - 8x + 12$ б) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 4$

Решение: а) $D(f) = (-\infty, +\infty)$. Находим производную: $f'(x) = 2x - 8$, имеем $2x - 8 = 0 \Leftrightarrow x = 4$.
Последующие рассуждения представим в таблице:

x	$-\infty < x < 4$	4	$4 < x < \infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	↘		↗

Таким образом, данная функция в промежутке $-\infty < x < 4$ убывает, а в промежутке $4 < x < \infty$ возрастает.

б) $D(f) = (-\infty, +\infty)$, $f'(x) = 3x^2 - 12x$, $(3x^2 - 12x = 0) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 4 \end{cases}$

Составим таблицу:

x	$-\infty < x < 0$	0	$0 < x < 4$	4	$4 < x < \infty$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗		↘		↗

Итак, в промежутках $-\infty < x < 0$ и $4 < x < \infty$ функция возрастает, а в промежутке $0 < x < 4$ - убывает.

Пример 2. Исследовать на экстремум следующие функции:

а) $f(x) = x^2 - 4x$ б) $f(x) = x^3 - 3x^2$

Решение: а) $D(f) = (-\infty, +\infty)$. Находим $f'(x) = 2x - 4$, приравняем производную к нулю, имеем $2x - 4 = 0$. Получим единственную критическую точку $x = 2$.

Последующие рассуждения представим в таблице:

x	$-\infty < x < 2$	2	$2 < x < \infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	↘	Минимум $f_{min}(x) = f(2) = -4$	↗

$$f_{\min}(x)=f(2)=2^2-4\cdot 2=4-8=-4$$

График функции $f(x)=x^2-4x$ есть парабола. Точка минимума (2;-4) является вершиной параболы.

б) $D(f)=(-\infty, +\infty)$. Находим $f'(x)=3x^2-6x$, приравняем производную к нулю, имеем $3x^2-6x=0$.

Получим две критические точки $x=0$ и $x=2$.

Последующие рассуждения представим в таблице:

x	$-\infty < x < 0$	0	$0 < x < 2$	2	$2 < x < \infty$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	\nearrow	Максимум $f_{\max}(x)=f(0)=0$	\searrow	Минимум $f_{\min}(x)=f(2)=-4$	\nearrow

$$f_{\min}(x)=f(2)=3\cdot 2^3-6\cdot 2=-4;$$

$$f_{\max}(x)=f(0)=3\cdot 0^3-6\cdot 0=0$$

Пример 3. Исследовать на экстремум с помощью второй производной функцию $f(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{5}{2}x^2+6x$.

Решение: $D(f)=(-\infty, +\infty)$. Находим $f'(x)=x^2-5x+6$, приравняем производную к нулю, имеем $x^2-5x+6=0$. Получим две критические точки $x=2$ и $x=3$.

Находим вторую производную $f''(x)=2x-5$.

Вычислим значение второй производной в критических точках: $f''(2)=2\cdot 2-5=-1<0$ - $x=2$ - точка максимума,

$f''(3)=2\cdot 3-5=1>0$ - $x=3$ - точка минимума.

$$f_{\min}(x)=f(3)=\frac{1}{3}\cdot 3^3-\frac{5}{2}\cdot 3^2+6\cdot 3=\frac{9}{2};$$



$$f_{\max}(x)=f(2)=\frac{1}{3}\cdot 2^3-\frac{5}{2}\cdot 2^2+6\cdot 2=\frac{4}{3}$$

Пример 4. Исследовать на выпуклость, вогнутость и точки перегиба функцию $f(x)=x^3-3x^2+5$.

Решение. 1) $D(f)=(-\infty, +\infty)$, найдем первую и вторую производные: $f'(x)=3x^2-6x$, $f''(x)=6x-6$.

2) Находим критические точки второго рода: $f''(x)=0$, $6x-6=0$, $x=1$ - критическая точка 2-го рода.

Последующие рассуждения представим в таблице:

x	$-\infty < x < 1$	1	$1 < x < \infty$
$f''(x)$	-	0	+
Форма кривой	 Выпукла	Перегиб	 Вогнута

Найдем ординаты точки перегиба $f(1)=1^3-3\cdot 1^2+5=3$, т.е. точка $M(1,3)$ - точка перегиба

Задание для практической работы

Вариант 1	Вариант 2	Вариант 3
Задание 1. Найти промежутки монотонности и экстремумы функции.		
$f(x)=x^3-3x^2-9x-4$	$f(x)=x^3+7x^2-5x+2$	$f(x)=x^3-2x^2-5x+3$
Задание 2. Исследовать функцию на экстремумы с помощью второй производной.		
$y=x^3+6x^2+9x$	$y=-x^3+4x^2-4x$	$y=\frac{1}{3}x^3+x^2-3x$
Задание 3. Найти интервалы выпуклости и вогнутости и точки перегиба кривой.		
$y=x+36x^2-2x^3-x^4$	$y=\frac{1}{3}\cdot x^3-x^2+3x-1$	$y=x^4-2x^3+6x+1$
Задание 4. Исследовать функцию и построить ее график.		
$f(x)=2x^3-3x^2+5$	$f(x)=x^4-8x^2+7$	$f(x)=2x^3-3x^2-12x-1$

Практическая работа 9.

Тема: Способы вычисления неопределенного интеграла.

ЦЕЛЬ: совершенствование умений находить неопределенные интегралы методом замены переменной и по частям, совершенствование умений проверять действие интегрирования дифференцированием.

Теоретические сведения к практической работе

Неопределенным интегралом от функции $f(x)$ называется совокупность всех первообразных для этой функции. Обозначается неопределенный интеграл: $\int f(x)dx = F(x) + C$ где $F'(x)=f(x)$, $C - const$.

Операция нахождения первообразной для данной функции называется *интегрированием*. Интегрирование является обратной операцией к дифференцированию.

Методы интегрирования

1. Непосредственное интегрирование

Этот способ интегрирования предполагает такое преобразование подынтегральной функции, которое позволило бы использовать для решения табличные интегралы.

Пример 1. Вычислите $\int (x^3 - 3x + \sin x)dx$

Решение: Для вычисления интеграла сначала воспользуемся 2 и 3 свойствами неопределенного интеграла, а затем применим табличные интегралы:

$$\int (x^3 - 3x + \sin x)dx = \int x^3 dx - 3 \cdot \int x dx + \int \sin x dx = \frac{x^{3+1}}{3+1} - 3 \cdot \frac{x^{1+1}}{1+1} - \cos x + C = \frac{x^4}{4} - \frac{3}{2} \cdot x^2 - \cos x + C$$

2. Метод замены переменной (метод подстановки)

Он является одним из наиболее эффективных и распространенных приемов интегрирования, позволяющих во многих случаях упростить вычисление интеграла. Суть этого метода состоит в том, что путем введения новой переменной интегрирования заданный интеграл сводится к новому интегралу, который легко вычисляется непосредственным интегрированием.

Алгоритм замены переменной:

- 1) Связать старую переменную интегрирования x с новой переменной t с помощью замены $x=\varphi(t)$.
- 2) Найти связь между дифференциалами $dx = \varphi'(t)dt$.
- 3) Перейти под знаком интеграла к новой переменной.
- 4) Проинтегрировать и в полученной первообразной вернуться к старой переменной, подставив $t = \psi(x)$

Пример 2. Вычислите неопределенный интеграл методом подстановки:

Решение: 1. $\int (2x-1)^3 dx = \left| \begin{array}{l} t = 2x-1 \\ dt = (2x-1)' dx \\ dt = 2 dx \\ dx = \frac{dt}{2} \end{array} \right| = \int \frac{t^3 dt}{2} = \frac{1}{2} \int t^3 dt = \frac{1}{2} \cdot \frac{t^4}{4} + C = \frac{1}{8} (2x-1)^4 + C.$

2. $\int \frac{dx}{\cos^2(6-5x)} = \left| \begin{array}{l} t = 6-5x \\ dt = -5 dx \\ dx = \frac{dt}{-5} \end{array} \right| = \int \frac{dx}{\cos^2 t} = -\frac{1}{5} \int \frac{dt}{\cos^2 t} = -\frac{1}{5} tg(t) = -\frac{1}{5} tg(6-5x) + C.$

3. $\int x^3 \sqrt{1-x^4} dx = \left| \begin{array}{l} t = 1-x^4 \\ dt = -4x^3 dx \\ x^3 dx = \frac{dt}{-4} \end{array} \right| = \int \sqrt{t} \frac{dt}{-4} = -\frac{1}{4} \int t^{1/2} dt = -\frac{1}{4} \frac{t^{3/2}}{3/2} = -\frac{1}{6} \sqrt{(1-x^4)^3} + C.$

3. Метод интегрирования по частям.

$$\int u dv = uv - \int v du \text{ - формула интегрирования по частям.}$$

Алгоритм Представляют интеграл через u , dv с помощью таблицы (где $f(x)$ – степенная функция):

Интеграл вида:		
$\int f(x) \cdot \sin kx dx$; $\int f(x) \cdot \cos kx dx$	$\int f(x) \cdot \ln kx dx$	$\int \sin ax \cdot e^{kx} dx$
$\int f(x) \cdot e^{kx} dx$; $\int f(x) \cdot a^{kx} dx$		$\int \cos ax \cdot e^{kx} dx$
Замена		
$u = f(x) \Rightarrow du = f'(x) \cdot dx$	$u = \ln kx \Rightarrow du = (\ln kx)' dx$	$u = e^{kx} \Rightarrow du = (e^{kx})' \cdot dx$
$dv = \begin{cases} \sin kx \cdot dx \\ \cos kx \cdot dx \\ e^{kx} \cdot dx \\ a^{kx} \cdot dx \end{cases} ; v = \begin{cases} \int \sin kx \cdot dx \\ \int \cos kx \cdot dx \\ \int e^{kx} \cdot dx \\ \int a^{kx} \cdot dx \end{cases}$	$dv = f(x) \cdot dx \Rightarrow v = \int f(x) dx$	$dv = \begin{cases} \sin ax \cdot dx \\ \cos ax \cdot dx \end{cases} ; v = \begin{cases} \int \sin ax \cdot dx \\ \int \cos ax \cdot dx \end{cases}$
Замечание		
Интегрируют по частям столько раз, какова степень многочлена $f(x)$		Интегрируют по частям два раза

Пример 3. Проинтегрировать по частям.

а) $\int (3x-1) \sin 2x dx$; б) $\int (1+2x) \ln x dx$.

Решение. а) $\int (3x-1) \sin 2x dx = \left| \begin{array}{l} U = 3x-1 \rightarrow dU = 3dx \\ dV = \sin 2x dx \rightarrow V = -\frac{\cos 2x}{2} \end{array} \right| = (3x-1) \left(-\frac{\cos 2x}{2} \right) + \int \frac{\cos 2x}{2} dx =$
 $= -\frac{1}{2} (3x-1) \cos 2x + \frac{3}{2} \int \cos 2x dx = -\frac{1}{2} (3x-1) \cos 2x + \frac{3}{4} \sin 2x + C.$

$$\begin{aligned} \text{б) } \int (1+2x) \ln x dx &= \left| \begin{array}{l} U = \ln x \rightarrow dU = \frac{dx}{x} \\ dV = (1+2x)dx \rightarrow V = \int (1+2x)dx = x+x^2 \end{array} \right| = \ln x (x+x^2) - \int (x+x^2) \frac{dx}{x} = \\ &= \ln x (x+x^2) - \int (1+x)dx = \ln x (x+x^2) - x - \frac{x^2}{2} + C. \end{aligned}$$

Задание для практической работы

Вариант 1	Вариант 2	Вариант 3
Задание 1. Найти неопределенные интегралы методом непосредственного интегрирования		
$\int (4x^5 + 3x^2 - x) dx$ $\int \left(4\cos x - 5^x - \frac{2}{x} \right) dx$ $\int \left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}} - \frac{1}{\cos^2 x} \right) dx$	$\int (6x^2 - x^3 - 10x^4) dx$ $\int \left(3\sin x + 4^x - \frac{3}{x} \right) dx$ $\int \left(\frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{\sin^2 x} \right) dx$	$\int (3x^8 - x^5 + 6x^3) dx$ $\int \left(5\cos x - 6^x + \frac{4}{x} \right) dx$ $\int \left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{\cos^2 x} \right) dx$
Задание 2.. Найти неопределенные интегралы методом подстановки:		
а) $\int \cos 6x dx$ б) $\int x^6 \cdot e^{x^7} dx$	а) $\int \sin 7x dx$ б) $\int x^3 \cdot e^{x^4} dx$	а) $\int \cos 5x dx$ б) $\int x^4 \cdot e^{x^5} dx$
Задание 3. Вычислить неопределенный интеграл методом интегрирования по частям:		
$\int 2x e^x dx$	$\int x 3^x dx$	$\int 3x e^x dx$

Вариант 4	Вариант 5	Вариант 6
Задание 1. Найти неопределенные интегралы методом непосредственного интегрирования		
$\int (5x^9 - 3x^7 + 2x^5) dx$ $\int \left(6\sin x + 7^x - \frac{3}{x} \right) dx$ $\int \left(\frac{1}{1-x^2} + \frac{1}{\sin^2 x} \right) dx$	$\int (9x^2 + 16x^3 - 10x^4) dx$ $\int \left(2\sin x + 3^x - \frac{5}{x} \right) dx$ $\int \left(\frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{\sin^2 x} \right) dx$	$\int (3x^8 - x^5 + 6x^3) dx$ $\int \left(5\cos x - 6^x + \frac{4}{x} \right) dx$ $\int \left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{\cos^2 x} \right) dx$
Задание 2.. Найти неопределенные интегралы методом подстановки:		
а) $\int \sin 4x dx$ б) $\int x^7 \cdot e^{x^8} dx$	а) $\int \sin 7x dx$ б) $\int x^3 \cdot e^{x^4} dx$	а) $\int \cos 5x dx$ б) $\int x^4 \cdot e^{x^5} dx$
Задание 3. Вычислить неопределенный интеграл методом интегрирования по частям:		
$\int x 4^x dx$	$\int x 3^x dx$	$\int 3x e^x dx$

Практическая работа 10.

Тема: Применение определенного интеграла к вычислению площадей плоских фигур и вычислению объемов

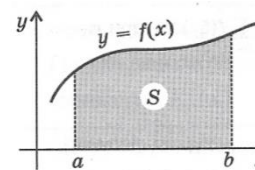
ЦЕЛЬ: совершенствование умений находить площади плоских фигур с помощью определенного интеграла.

Краткие теоретические сведения

1. Вычисление площади криволинейной трапеции:

Криволинейной трапецией называется фигура, ограниченная сверху графиком непрерывной функции $y=f(x)$, снизу отрезком $[a;b]$ оси Ox , а с боков отрезками прямых $x=a$, $x=b$. Площадь криволинейной трапеции можно вычислить с помощью определённого интеграла

$$S = \int_a^b f(x)dx = F(x)|_a^b = F(b) - F(a)$$



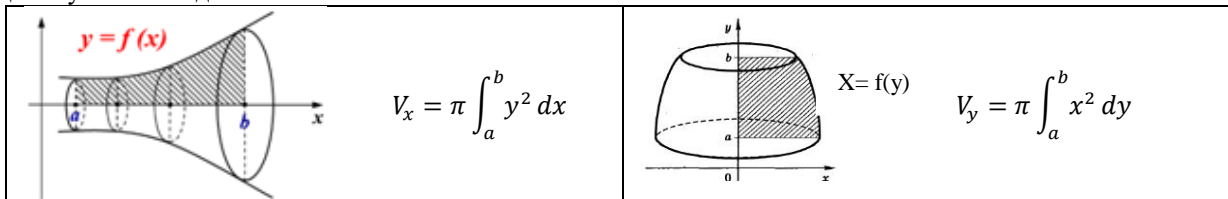
$S = \int_a^b f(x)dx$	$S = \int_a^b f(x)dx + \int_c^b \varphi(x)dx$	<p>график расположен ниже оси Ox (когда $f(x) < 0$ на $[a, b]$)</p> $S = - \int_a^b f(x)dx$	<p>фигура ограничена двумя кривыми $f(x)$, $\varphi(x)$ и прямыми $x=a$ и $x=b$</p> $S = \int_a^b (f(x) - \varphi(x))dx$
-----------------------	---	---	--

Алгоритм решения задачи на вычисление площади плоской фигуры:

- 1) Сделать приблизительный график заданных функций, ограничивающих площадь плоской фигуры.
- 2) Найти пределы интегрирования.
- 3) Выбрать формулу для вычисления площади.
- 4) Вычислить площадь заданной фигуры.

2. Вычисление объема тела вращения

Есть два случая нахождения объемов тела



Алгоритм решения задачи на вычисление объемов тел:

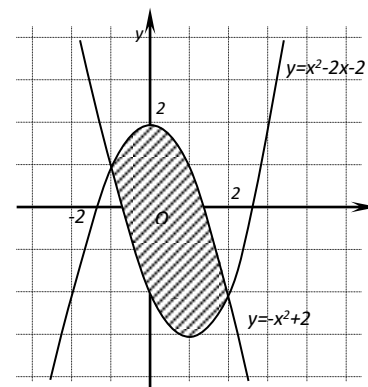
- 1) Сделать приблизительный рисунок тела.
- 2) Найти пределы интегрирования.
- 3) Выбрать формулу для вычисления объема.
- 4) Найти объем тела.

Примеры решения задач

Пример 1. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями.

Решение: Из графика функции найдем точки пересечения графиков, -1 и 2. Эти точки будут пределами интегрирования. Вычислим площадь по 4 формуле (из графика функции ограничивающего фигуру сверху вычитаем график ограничивающий с низу)

$$S = \int_{-1}^2 ((-x^2 + 2) - (x^2 - 2x - 2)) dx = \int_{-1}^2 (-2x^2 + 2x + 4) dx = \left(-\frac{2}{3}x^3 + x^2 + 4x \right) \Big|_{-1}^2 = -\frac{16}{3} + 4 + 8 - \left(\frac{2}{3} + 1 - 4 \right) = 9 \text{ (кв. ед.)}$$

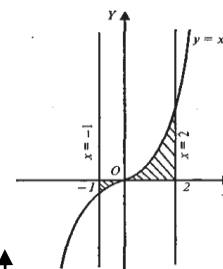


Пример 2. Найти площадь фигуры, заключенной между линиями $y = x^3$, $x = -1$, $x = 2$ и осью Ox

Решение: найдем точки пересечения графика функции $y = x^3$ с осью Ox (см. рис.):

$y = x^3$; $y = 0 \Leftrightarrow x = 0$. Вычислим точки пересечения графиков: $y(-1) = (-1)^3 = -1$; $y(2) = 2^3 = 8$. По найденным точкам $(-1; -1)$, $(2; 8)$, $(0; 0)$ по строим график функции. Искомая площадь состоит из двух частей, поэтому:

$$S = - \int_{-1}^0 x^3 dx + \int_0^2 x^3 dx = - \left(\frac{x^4}{4} \right) \Big|_{-1}^0 + \left(\frac{x^4}{4} \right) \Big|_0^2 = \frac{1}{4} + 4 = 4 \frac{1}{4} \text{ (кв. ед.)}$$



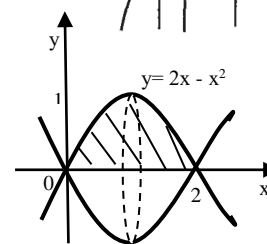
Пример 3. Вычислите объем тела, полученного вращением фигуры, ограниченной линиями $y = 2x - x^2$, $y = 0$, вокруг оси Ox .

Решение. 1) Построим график заданной функции.

Вершины параболы: $x_B = -\frac{b}{2a} = -\frac{2}{-2} = 1$, $y_B = 2 \cdot 1 - 1^2 = 1$. т. $A(1; 1)$

Пересечение с осью Ox : $2x - x^2 = 0$, $x_1 = 0$, $x_2 = 2$, т. $(0; 0)$ и $(2; 0)$. Искомая плоская фигура заштрихована, именно она и вращается вокруг оси Ox .

2) Вычислим объем, учитывая, что $x_1 = 0$, $x_2 = 2$ - пределы интегрирования.



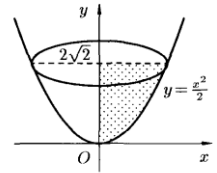
$$V = \pi \int_0^2 y^2(x) dx = \pi \int_0^2 (2x - x^2)^2 dx = \pi \int_0^2 (x^4 - 4x^3 + 4x^2) dx = \pi \left(\frac{x^5}{5} - x^4 + \frac{4x^3}{3} \right) \Big|_0^2 = \frac{16\pi}{15} (\text{куб.ед})$$

Пример 4. Вычислите объём тела, полученного вращением фигуры, ограниченной линиями $y = \frac{x^2}{2}$, $y = 2\sqrt{2}$, $x=0$ вокруг оси Oy .

Решение. 1) Построим график заданной функции (см. рис). Искомая плоская фигура закрашена, именно она и вращается вокруг оси Oy . так как фигура вращается вокруг оси Oy , выразим $x^2 = 2y$.

2) Вычислим объём

$$V = \pi \int_0^{2\sqrt{2}} x^2 dy = \pi \int_0^{2\sqrt{2}} 2y dy = \pi y^2 \Big|_0^{2\sqrt{2}} = \pi (2\sqrt{2})^2 = 8\pi (\text{куб.ед})$$



Задание для практической работы

Вариант 1	Вариант 2	Вариант 3
Задание 1. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями. Предварительно сделав рисунок.		
1. параболой $y=4-x^2$ и осью Ox . 2. $y = x^3$, $y = 4x$	1. параболой $y=9-x^2$ и осью Ox 2. $y = x^3$, $y = 3x$	1. параболой $y=1-x^2$ и осью Ox 2. $y = x^3$, $y = 2x$
Задание 2. Вычислить объёмы тел, образованных вращением фигур, ограниченных графиками функций. Ось вращения Ox .		
1. $y = 9-x^2$, $y=0$; 2. $y^2 = 3x$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 3$	1. $y = 4x-x^2$, $y=0$; 2. $y^2 = 2x$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 4$	1. $y = x^2 - 1$, $y=0$; 2. $y^2 = 5x$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 2$

Практическая работа №11

Тема: Вычисление вероятности событий. Формула полной вероятности и формула Бернулли

Цель работы: закрепить теоретические знания и отработать умения по решению задач на вычисление вероятностей событий.

Краткие теоретические сведения

Вероятность события.

Под вероятностью $P(A)$ наступления события принимается отношение числа исходов, благоприятствующих наступлению данного события, к числу исходов испытания. Вероятность – устойчивая частота. $P(A) = \frac{m}{n} \cdot 100\%$

Вероятность любого события заключена между нулем и единицей $0 \leq P \leq 1$.

Теорема сложения вероятностей. Вероятность наступления одного из нескольких несовместимых событий без указания какого именно, равно сумме вероятностей этих событий.

Теорема умножения вероятностей. Вероятность совместного наступления двух событий равна произведению вероятности наступления первого события на условную вероятность наступления второго события, вычисленную в предположении, что первое событие имеет место.

Формула полной вероятности. Если событие A может произойти только при выполнении одного из событий исключающих друг друга B_1, B_2, \dots, B_n , образующих полную группу несовместных событий, то вероятность события A вычисляется по формуле $P(A) = P(B_1)P(A|B_1) + P(B_2)P(A|B_2) + \dots + P(B_n)P(A|B_n)$, где $P(B_1), P(B_2), \dots, P(B_n)$ – вероятности событий, а условные вероятности события A относительно каждого из событий системы равны $P(A|B_1), P(A|B_2), \dots, P(A|B_n)$.

Пример 1. В ящике 16 стандартных и 7 бракованных деталей. Наудачу извлечены 6 деталей. Найти вероятность того, что среди извлеченных ровно 4 стандартных детали.

Решение: Сначала найдем общее число исходов – это число всех различных способов выбрать любые n деталей из общего множества в N деталей (без учета порядка), то есть число сочетаний C_N^n .

Теперь найдем число всех способов выбрать k стандартных деталей из K возможных – это сочетания C_K^k , и одновременно число всех способов выбрать $n-k$ бракованных деталей из $N-K$ возможных – C_{N-K}^{n-k} . По правилу произведения перемножая эти числа, получим число исходов, благоприятствующих нашему событию – $C_K^k \cdot C_{N-K}^{n-k}$.

Применяя классическое определение вероятности – поделив число благоприятствующих исходов на общее число исходов, придем к искомой формуле: $P = \frac{C_K^k \cdot C_{N-K}^{n-k}}{C_N^n}$ (1)

Подставляем в формулу (1) значения: $K=16$ стандартных деталей, $N-K=7$ бракованных деталей, итого $N=16+7=23$ всего деталей в ящике. Из ящика извлекают $n=6$ деталей, из них должно быть $k=4$ стандартных и соответственно, $n-k=6-4=2$ бракованные. Получаем нужную вероятность:

$$P = \frac{C_{16}^4 \cdot C_7^2}{C_{23}^6} = \frac{1820 \cdot 21}{100947} = 0,379$$

Пример 2. Три ящика содержат по 10 деталей. В первом ящике – 8 стандартных деталей, во втором – 7, в третьем – 9. Из каждого ящика наудачу вынимают по одной детали. Найти вероятность того, что все три вынутые детали окажутся стандартными.

Решение: вероятность того, что из первого ящика вынута стандартная деталь (событие A), $P(A) = 8/10=0,8$.

Вероятность того, что из второго ящика вынута стандартная деталь (событие B), $P(B) = 7/10=0,7$.

Вероятность того, что из третьего ящика вынута стандартная деталь (событие C), $P(C) = 9/10=0,9$.

Так как события A, B, C независимы в совокупности, то то искомую вероятность найдем по теореме умножения $P(ABC) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C) = 0,8 \cdot 0,7 \cdot 0,9 = 0,504$

Пример 3. В ящике содержится 12 деталей, изготовленных на заводе №1, 20 деталей – на заводе №2 и 18 деталей – на заводе №3. Вероятность того, что деталь, изготовленная на заводе №1, отличного качества, равна 0,9; для деталей, изготовленных на заводах №2 и №3, эти вероятности соответственно равны 0,6 и 0,9. Найти вероятность того, что извлеченная наудачу деталь окажется отличного качества.

Решение: введем группу гипотез:

H_1 = «Деталь изготовлена первым заводом»

H_2 = «Деталь изготовлена вторым заводом»

H_3 = «Деталь изготовлена третьим заводом»

Найдем вероятности гипотез по классическому определению вероятности

$$P(H_1) = \frac{12}{12+20+18} = \frac{12}{50} = 0,24, \quad P(H_2) = \frac{20}{12+20+18} = \frac{20}{50} = 0,4, \quad P(H_3) = \frac{18}{12+20+18} = \frac{18}{50} = 0,36.$$

Введем событие A = «Деталь отличного качества». Условные вероятности даны в задаче: $P(A|H_1) = 0,9$, $P(A|H_2) = 0,6$, $P(A|H_3) = 0,9$.

Найдем вероятность события A по формуле полной вероятности:

$$P(A) = P(A|H_1) \cdot P(H_1) + P(A|H_2) \cdot P(H_2) + P(A|H_3) \cdot P(H_3) = 0,24 \cdot 0,9 + 0,4 \cdot 0,6 + 0,36 \cdot 0,9 = 0,78$$

Схема повторных испытаний. Формула Бернулли

Если при одних и тех же условиях определенный опыт повторяется n раз и если вероятность появления некоторого события A в каждом опыте равна p , то вероятность того, что событие A в серии из n опытов произойдет ровно k раз, находится по формуле Бернулли: $P_n(k) = C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k}$, где $q=1-p$

Пример 4. Произвели 7 выстрелов. Вероятность попадания при одном выстреле равна 0,705. Найти вероятность того, что при этом будет ровно 5 попаданий.

Получаем, что в задаче идет речь о повторных независимых испытаниях (выстрелах по мишени), всего производится $n=7$ выстрелов, вероятность попадания при каждом $p=0,705$, вероятность промаха $q=1-p=1-0,705=0,295$. Нужно найти, что будет ровно $k=5$ попаданий. Подставляем все в формулу (1) и получаем:

$$P_7(5) = C_7^5 \cdot 0,705^5 \cdot 0,295^2 = 21 \cdot 0,705^5 \cdot 0,295^2 = 0,318.$$

Пример 5. Вероятность выигрыша в лотерею на один билет равна 0,2. Куплено 12 билетов. Найти наивероятнейшее число выигравших билетов и соответствующую вероятность.

Решение: Пусть производится n опытов, вероятность наступления события A в каждом из которых одинакова равна p . Тогда наивероятнейшее число m наступлений события A в этой серии опытов можно найти по формуле:

$$np - q \leq m \leq np + p, \quad q = 1 - p. \quad (1)$$

По условию задачи всего куплено $n=12$ билетов, вероятность выигрыша по каждому $p=0,2$. Получаем по формуле (1):

$$12 \cdot 0,2 - 0,8 \leq m \leq 12 \cdot 0,2 + 0,2, \quad 1,6 \leq m \leq 2,6, \quad m=2.$$

Наиболее вероятное число выигрышных билетов равно двум.

Найдем вероятность этого события по формуле Бернулли: $P_n(k) = C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k}$, где $q=1-p$

$$P_{12}(2) = C_{12}^2 \cdot 0,2^2 \cdot 0,8^{10} = 66 \cdot 0,2^2 \cdot 0,8^{10} = 0,283.$$

Задания для самостоятельного решения

Вариант 1	Вариант 2	Вариант 3
Задание № 1. В ящике K стандартных и $M=N-K$ (всего N деталей) бракованных деталей. Наудачу извлечены n деталей. Найти вероятность того, что среди извлеченных ровно k стандартных деталей.		
$K=15, \quad M=7$ $n=5, \quad k=3$	$K=17, \quad M=8$ $n=6, \quad k=4$	$K=18, \quad M=9$ $n=7, \quad k=5$
Задание № 2. В 3-х ящиках находится по n деталей. В 1-ом m_1 стандартных деталей, во 2-ом m_2 стандартных деталей, в 3-ем m_3 стандартных деталей. Из каждого ящика вынимают по одной детали. Найти вероятность того, что все три вынутые детали окажутся стандартными.		
$n=20,$ $m_1=15, \quad m_2=16, \quad m_3=19$	$n=30,$ $m_1=25, \quad m_2=28, \quad m_3=24$	$n=15,$ $m_1=14, \quad m_2=10, \quad m_3=12$
Задание №3. В ящике содержится a деталей, изготовленных на заводе №1, b деталей – на заводе №2 и c деталей – на заводе №3. Вероятность того, что деталь, изготовленная на заводе №1, отличного качества, равна p_1 ; для деталей, изготовленных на заводах №2 – p_2 и №3 – p_3 . Используя формулу полной вероятности, определите вероятность того, что извлеченная наудачу деталь окажется отличного качества.		
$a=14, \quad b=30, \quad c=16$ $p_1=0,9 \quad p_2=0,8 \quad p_3=0,8$	$a=12, \quad b=22, \quad c=16$ $p_1=0,7 \quad p_2=0,9 \quad p_3=0,8$	$a=14, \quad b=16, \quad c=10$ $p_1=0,8 \quad p_2=0,6 \quad p_3=0,9$
Задание № 4. Вероятность изготовления изделия высшего сорта на данном предприятии равна p . Случайно отобрано n изделий. Используя формулу Бернулли, найти наивероятнейшее число отобранных изделий высшего сорта и соответствующую вероятность.		
$n=50, \quad p=0,8$	$n=40, \quad p=0,7$	$n=60, \quad p=0,9$

Практическая работа 12.

Тема: Составление статистического распределения выборки, построение полигона и гистограммы

Цель: Формирование умений представлять статистические данные графически, совершенствование умений вычислять числовые характеристики величин на основе опытных данных.

Краткие теоретические сведения

1. Статистическое дискретное распределение. Полигон.

Пусть из генеральной совокупности извлечена выборка, причем x_1 наблюдалось n_1 раз, x_2 – n_2 раз, x_k – n_k раз и $\sum n_i = n$ – объем выборки. Наблюдаемые значения x_i называют вариантами, а последовательность вариантов, записанных в возрастающем порядке – вариационным рядом. Число наблюдений варианты называют частотой, а ее отношение к объему выборки – *относительной частотой* $n_i/n = w_i$.

Статистическим (эмпирическим) законом распределения выборки, или просто статистическим распределением выборки называют последовательность вариантов x_i и соответствующих им частот n_i или относительных частот w_i .

Статистическое распределение выборки удобно представлять в форме таблицы распределения частот, называемой статистическим дискретным рядом распределения:

X_i	x_1	x_2	...	x_m
n_i	n_1	n_2	...	n_m

(сумма всех частот равна объему выборки $\sum n_i = n$) или в виде таблицы распределения относительных частот:

X_i	x_1	x_2	...	x_m
w_i	w_1	w_2	...	w_m

(сумма всех относительных частот равна единице $\sum w_i = 1$)

Пример 1. При измерениях в однородных группах обследуемых получены следующие выборки: 71, 72, 74, 70, 70, 72, 71, 74, 71, 72, 71, 73, 72, 72, 72, 74, 72, 73, 72, 74 (частота пульса). Составить по этим результатам статистический ряд распределения частот и относительных частот.

Решение. 1) Статистический ряд распределения частот:

x_i	70	71	72	73	74
n_i	2	4	8	2	4

2) Объем выборки: $n = 2 + 4 + 8 + 2 + 4 = 20$. Найдем относительные частоты, для чего разделим частоты на объем выборки $n_i/n = w_i$: $w_1 = 2/20 = 0.1$; $w_2 = 4/20 = 0.2$; $w_3 = 0.4$; $w_4 = 2/20 = 0.1$; $w_5 = 4/20 = 0.2$.

Напишем распределение относительных частот:

x_i	70	71	72	73	74
w_i	0.1	0.2	0.4	0.1	0.2

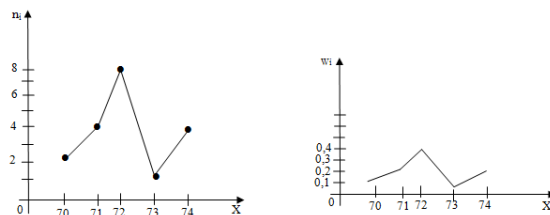
Контроль: $0.1 + 0.2 + 0.4 + 0.1 + 0.2 = 1$.

Полигоном частот называют ломаную, отрезки, которой соединяют точки $(x_1, n_1), (x_2, n_2), \dots, (x_k, n_k)$. Для построения полигона частот на оси абсцисс откладывают варианты x_i , а на оси ординат – соответствующие им частоты n_i . Точки (x_i, n_i) соединяют отрезками и получают полигон частот.

Полигоном относительных частот называют ломаную, отрезки, которой соединяют точки $(x_1, w_1), (x_2, w_2), \dots, (x_k, w_k)$. Для построения полигона относительных частот на оси абсцисс откладывают варианты x_i , а на оси ординат соответствующие им частоты w_i . Точки (x_i, w_i) соединяют отрезками и получают полигон относительных частот.

Пример 2. Постройте полигон частот и относительных частот по данным примера 1.

Решение: Используя дискретный статистический ряд распределения, составленный в примере 1 построим полигон частот и полигон относительных частот (см. рисунок)



2. Статистический интервальный ряд распределения. Гистограмма.

Статистическим дискретным рядом (или эмпирической функцией распределения) обычно пользуются в том случае, когда отличных друг от друга вариантов в выборке не слишком много, или тогда, когда дискретность по тем или иным причинам существенна для исследователя. Если же интересующий нас признак генеральной совокупности X распределен непрерывно или его дискретность нецелесообразно (или невозможно) учитывать, то варианты группируются в интервалы.

Статистическое распределение можно задать также в виде последовательности интервалов и соответствующих им частот (в качестве частоты, соответствующей интервалу, принимают сумму частот, попавших в этот интервал).

Замечание. Часто $h_i - h_{i-1} = h$ при всех i , т.е. группировку осуществляют с равным шагом h . В этой ситуации можно руководствоваться следующими эмпирическими рекомендациями по выборке a , k и h_i :

1. $R_{\text{размах}} = X_{\text{max}} - X_{\text{min}}$ (длина интервала)
2. $h = R/k$; k – число интервалов
3. $k \geq 1 + 3.322 \cdot \lg n$ (формула Стерджеса) количество интервалов
4. $a = X_{\text{min}}$, $b = X_{\text{max}}$
5. $h = a + ih$, $i = 0, 1, \dots, k$

Полученную группировку удобно представить в форме частотной таблицы, которая носит название статистический интервальный ряд распределения:

Интервалы группировки	$[h_0; h_1)$	$[h_1; h_2)$...	$[h_{k-2}; h_{k-1})$	$[h_{k-1}; h_k)$
-----------------------	--------------	--------------	-----	----------------------	------------------

Частоты	n_1	n_2	...	n_{k-1}	n_k
---------	-------	-------	-----	-----------	-------

Аналогическую таблицу можно образовать, заменяя частоты n_i относительными частотами:

Интервалы группировки	$[h_0; h_1)$	$[h_1; h_2)$...	$[h_{k-2}; h_{k-1})$	$[h_{k-1}; h_k)$
Отн. частоты	w_1	w_2	...	w_{k-1}	w_k

Пример 3. Из очень большой партии деталей извлечена случайная выборка объема 50 интересующий нас признак X-размеры деталей, измеренные с точностью до 1см, представлен следующим вариационным рядом: 22, 47, 26, 26, 30, 28, 28, 31, 31, 31, 32, 32, 33, 33, 33, 33, 34, 34, 34, 34, 34, 35, 35, 36, 36, 36, 36, 36, 37, 37, 37, 37, 37, 37, 38, 38, 40, 40, 40, 40, 40, 41, 41, 43, 44, 44, 45, 45, 47, 50. Найти статистический интервальный ряд распределения.

Решение. Определим характеристики группировки с помощью замечания.

$$k \geq 1 + 3.322 \lg 50 = 1 + 3.322 \cdot \lg(5 \cdot 10) = 1 + 3.32(\lg 5 + \lg 10) = 6.6$$

$$\text{Имеем, } a=22, k=7, \quad h=(50-22)/7=4, \quad h_i=22+4i, i=0,1,\dots,7.$$

Интервалы группировки	22-26	26-30	30-34	34-38	38-42	42-46	46-50
Частоты n_i	1	4	10	18	9	5	3
Отн. частоты w_i	0.02	0.08	0.2	0.36	0.18	0.1	0.06

Десятичные логарифмы от 1 до 10

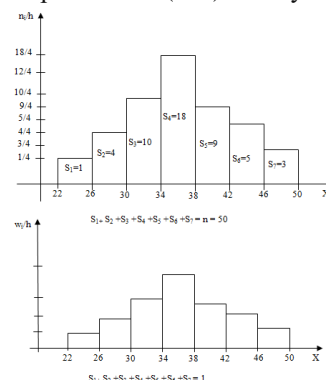
n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\lg n \approx$	0	0.3	0.48	0.6	0.7	0.78	0.85	0.9	0.95	1

Наиболее информативной графической формой частот является специальный график, называемый гистограммой частот.

Гистограммой частот называется ступенчатая фигура, состоящая из прямоугольников, основаниями которых служат частичные интервалы длиной $h=x_i-x_{i-1}$, а их высоты равны n_i/h (для относительных частот - w_i/h).

Для построения гистограммы частот на оси абсцисс откладывают частичные интервалы, а над ними проводят отрезки, параллельные оси абсцисс на расстоянии n_i/h . Площадь i -го частичного прямоугольника равна $S=h \cdot (n_i/h)=n_i$ - сумме частот вариант i -го интервала; следовательно, площадь гистограммы частот равна сумме всех частот, т.е. объему выборки.

Для построения гистограммы относительных частот на оси абсцисс откладывают частичные интервалы, а над ними проводят отрезки, параллельные оси абсцисс на расстоянии w_i/h . Площадь i -го частичного прямоугольника равна $S=h \cdot (w_i/h)=w_i$ - относительной частоте вариант, попавших в i -й интервал. Следовательно, площадь гистограммы относительных частот равна сумме всех относительных частот, т.е. единице.



Пример 4. Постройте гистограмму частот и относительных частот по данным примера 3. (см. рисунок)

3. Основные характеристики выборки

Мода (Mo) - это варианта, которая чаще всего встречается в изучаемой совокупности

Медианой (Me) называют такое значение признака, которое приходится на середину ранжированного ряда и делит его на две равные по числу единиц части. Таким образом, в ранжированном ряду распределения одна половина ряда имеет значения признака, превышающие медиану, другая - меньше медианы. В дискретном ряду, состоящем из четного числа единиц совокупности, медиана определяется как средняя из срединных вариант

Выборочной средней называют среднее арифметическое значение признака выборочной совокупности. Если все значения признака выборки различны, то, если же все значения имеют частоты n_1, n_2, \dots, n_k , то $\bar{x}_B = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_k}{n}$

Выборочной дисперсией называют среднее арифметическое квадратов отклонения наблюдаемых значений признака от их среднего значения. Если все значения признака выборки различны, то $\overline{D}_B = \frac{\sum_{i=1}^k (x_i - \bar{x}_B)^2}{n}$, если же все значения имеют частоты n_1, n_2, \dots, n_k , то $\overline{D}_B = \frac{\sum_{i=1}^k n_i (x_i - \bar{x}_B)^2}{n}$

Выборочным средним квадратическим отклонением называют квадратный корень из выборочной дисперсии: $\sigma_n = \sqrt{\overline{D}_B}$

3. Эмпирическая функция выборки.

Эмпирической функцией выборки (функцией распределения выборки) называется функция: $F(x) = \frac{n_x}{n}$, которую

можно записать в следующем виде: $F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq x_1; \\ \frac{n_x}{n}, & x_1 < x \leq x_{i+1} (i < m); \\ 1, & x > x_m \end{cases}$

Данная функция непрерывная, кусочно-постоянна и изменяется в каждой точке x_i , где x_i — варианта рассматриваемого статистического распределения.

Пример 5. По заданной выборке построить эмпирическую функцию выборки.

x_i	2	4	5	6	7
n_i	5	3	4	5	3

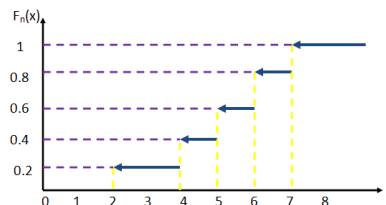
при $(x < 2), F(x) = \frac{0}{20} = 0$, т.к. величина не имеет значений меньше 2.

при $(x < 4), F(x) = \frac{5}{20} = 0.25$

График данной функции представлен:

при $(X < 5), F(X) = \frac{5+3}{20} = 0,4$
при $(X < 6), F(X) = \frac{5+3+4}{20} = 0,6$
при $(X < 7), F(X) = \frac{5+3+4+5}{20} = 0,85$
при $(X > 7), F(X) = \frac{5+3+4+5+3}{20} = 1$

Функция распределения $F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 2; \\ 0,25, & 2 < x \leq 4; \\ 0,4, & 4 < x \leq 5; \\ 0,6, & 5 < x \leq 6; \\ 0,85, & 6 < x \leq 7; \\ 1, & x > 7 \end{cases}$



Задачи для самостоятельного решения.

Вариант 1	Вариант 2	Вариант 3
Задание № 1. По данным выборки требуется: 1) Составить статистический ряд распределения частот и относительных частот. Построить полигон и гистограмму частот и относительных частот распределения 2) Вычислить выборочную среднюю, дисперсию, моду, медиану. 3) Составить статистический интервальный ряд распределения и построить гистограмму частот и относительных частот распределения 4) Построить эмпирическую функцию распределения и ее график		
60, 70, 70, 68, 70, 72, 64, 66, 66, 70, 76, 76, 80, 64, 62, 78, 78, 76, 70, 68, 64, 62, 70, 68, 72, 70, 72, 72, 70, 70, 76, 76, 86, 74, 74, 74, 80, 80, 66, 72, 76, 76, 74, 74, 74, 72, 78, 78, 76, 74, 76, 76, 80, 78.	26, 25, 25, 26, 25, 23, 24, 24, 19, 23, 20, 19, 24, 22, 24, 23, 20, 23, 24, 19, 21, 18, 21, 18, 20, 18, 15, 21, 15, 18, 24, 23, 15, 18, 20, 18, 19, 22, 26, 21, 23, 22, 23, 23, 21, 15, 19, 26, 24, 20, 23, 25.	72, 75, 70, 68, 70, 72, 64, 66, 66, 70, 76, 76, 80, 64, 62, 78, 80, 76, 66, 68, 63, 62, 70, 68, 72, 70, 72, 72, 70, 80, 76, 76, 76, 74, 74, 74, 80, 80, 66, 72, 76, 76, 74, 75, 74, 72, 76, 78, 76, 72, 76, 74, 80, 88.

Практическая работа 12.

Тема: Составление статистического распределения выборки, построение полигона и гистограммы.

Цель: научиться обрабатывать экспериментальные данные, строить вариационный ряд, эмпирическую функцию распределения, полигон и гистограмму ряда, определять его характеристики.

Краткие теоретические сведения

Совокупность всех мысленно возможных объектов данного вида, над которыми проводятся наблюдения с целью получения конкретных значений определенной случайной величины называется **генеральной совокупностью**. Генеральная совокупность бывает конечной или бесконечной в зависимости от того, конечна или бесконечна совокупность составляющих её элементов.

Определение. Часть отобранных объектов из генеральной совокупности называется **выборочной совокупностью или выборкой**.

Статистическим распределением выборки или статистическим рядом называют перечень вариантов и соответствующих им частот или относительных частот.

Пример 1. После группировки данных в выборке статистический ряд задан таблицей 1 (где объём выборки $n = 15$).

Таблица 1

x_i	2	3	4	6
n_i	1	4	2	3

В таблице 1 значения x_i называют вариантами. Последовательность вариантов, записанных в возрастающем порядке (вся строка x_i) называется **вариационным рядом**. Число наблюдений n_i называют **частотами**, i – номер варианты.

Учитывая, что $\sum_{i=1}^k n_i = n$, n – это объём выборки, можно найти **относительную частоту** $w_i = n_i/n$, наблюдаемого значения x_i – варианты, k – количество вариантов.

Тогда таблица будет иметь вид:

Таблица 2

x_i	2	3	4	6
$w_i = n_i/n$	0,1	0,3	0,4	0,6

Табличные данные могут быть представлены графически в виде **полигона** или **гистограммы**. Если выборка задана в виде отдельных точек, а не интервалов, тогда строят полигон частот. **Полигоном** относительных частот называется ломаная, отрезки которой соединяют точки $(x_i; w_i)$. На рис. 1 изображен полигон частот, приведённых в таблице 1.



Рис. 1. Полигон

Пример 2. В этом примере наблюдаемые значения случайной величины после группировки данных в выборке разбиты на последовательные непересекающиеся частичные интервалы. В результате получается статистический ряд, который задан таблицей 3.

Таблица 3

x_i	$[0,2)$	$[2,4)$	$[4,6)$	$[6,8]$
n_i	5	10	12	3

Данную таблицу можно представить через относительную частоту $w_i = n_i/n$ (где объем выборки $n = 30$) в таблице 4.

Таблица 4

$h=x_i-x_{i-1}$	$[0,2)$	$[2,4)$	$[4,6)$	$[6,8]$
$w_i = n_i/n$	0,17	0,33	0,4	0,1

При этом частоты w_i удовлетворяют условию $\sum_{i=1}^k w_i = 1$.

Если выборка задана в виде интервалов, тогда строят гистограмму.

Гистограмма частот

Гистограммой частот называется ступенчатая фигура, состоящая из прямоугольников, основаниями которых служат частичные интервалы длиной $h=x_i-x_{i-1}$, а их высоты равны n_i/h (для относительных частот - w_i/h).

Если объем выборки из генеральной совокупности случайной непрерывной величины велик, то прибегают к предварительной группировке данных: размах выборки разбивают на k частичных интервалов J_k . Количество интервалов подсчитывается по формуле:

$$k = 1 + [\log_2 n] \quad \text{или} \quad k = 1 + [3,322 \lg n], \quad [x] - \text{целая часть числа } x.$$

Подсчитывается, сколько значений из n_1, n_2, \dots, n_m попало в каждый из k интервалов. Вариантами для выборки считают середины этих интервалов.

Основные характеристики выборки

Мода (M_o) - это варианта, которая чаще всего встречается в изучаемой совокупности

Медианой M_e называют такое значение признака, которое приходится на середину ранжированного ряда и делит его на две равные по числу единиц части. Таким образом, в ранжированном ряду распределения одна половина ряда имеет значения признака, превышающие медиану, другая - меньше медианы. В дискретном ряду, состоящем из четного числа единиц совокупности, медиана определяется как средняя из срединных вариантов

Вариационный размах R (или размах вариации) - это разница между максимальным и минимальным значениями признака.

Выборочной средней называют среднее арифметическое значение признака выборочной совокупности. Если все значения признака выборки различны, то, если же все значения имеют частоты n_1, n_2, \dots, n_k , то $\bar{x}_B = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_k}{n}$

Выборочной дисперсией называют среднее арифметическое квадратов отклонения наблюдаемых значений признака от их среднего значения. Если все значения признака выборки различны, то $\overline{D}_B = \frac{\sum_{i=1}^k (x_i - \bar{x}_B)^2}{n}$, если же все значения имеют частоты n_1, n_2, \dots, n_k , то $\overline{D}_B = \frac{\sum_{i=1}^k n_i (x_i - \bar{x}_B)^2}{n}$

Выборочным средним квадратическим отклонением называют квадратный корень из выборочной дисперсии: $\sigma_n = \sqrt{\overline{D}_B}$

Средним абсолютным отклонением θ называется средняя арифметическая величина из абсолютных величин отклонений всех вариантов от их средней $\theta = \frac{\sum |x_i - \bar{x}_B| n_i}{n}$

Коэффициентом вариации V называется отношение среднего квадратического отклонения к средней величине, выраженное в процентах $V = \frac{\sigma_B}{\bar{x}_B} \cdot 100\%$

Задачи для самостоятельного решения.

В эксперименте наблюдалась случайная величина X . Соответствующие выборочные значения даны. Построить вариационный ряд, эмпирическую функцию распределения и ее график, полигон частот и относительных частот, гистограмму с заданным частичным интервалом, вычислить основные характеристики выборки.

Вариант 1.	Вариант 2	Вариант 3
(3,73 3,73 3,73 3,77 3,77 3,85 3,85 3,85 3,85 4,07 4,15 4,15 4,15 4,15 4,23 4,23 4,31 4,31 4,31 4,31 4,31 4,34 4,35 4,77 4,82 5,26 5,26 5,53 6,03 6,03) с	(1,50 1,52 1,52 1,52 1,54 1,59 1,71 1,90 2,10 2,10 2,35 2,46 2,46 2,50 2,50 3,73 3,73 3,73 3,77 3,77 3,85 3,85 3,85 3,85 4,07 4,15 4,15 4,15 4,15 4,15 4,20) с	(1,02 1,02 1,03 1,03 1,05 1,05 1,05 1,05 1,32 1,32 1,32 1,34 1,34 1,37 1,47 1,50 1,52 1,54 1,54 1,59 1,59 1,71 1,90 2,10 2,10 2,35 2,35 2,46 2,50 2,50) с

частичным интервалом 0,46.	частичным интервалом 0,54.	частичным интервалом 0,37.
----------------------------	----------------------------	----------------------------