

История знаменитой теоремы

Актуальность: по выражению известного ученого Иоганна Кеплера, «геометрия владеет двумя сокровищами – **теоремой Пифагора** и золотым сечением, и если первое из них можно сравнить с мерой золота, то второе – с драгоценным камнем...».

Один американский математик, наш современник, около 20 лет собирал различные способы доказательства теоремы Пифагора, и сейчас его «коллекция» содержит около 300 различных доказательств. Это говорит о том, что древняя теорема актуальна и интересна людям до сих пор.

Новизна: в школьном курсе геометрии с помощью теоремы **Пифагора** решаются только математические задачи. К сожалению, вопрос о практическом применении и наглядности теоремы **Пифагора** не рассматривается.

Изучая дополнительную литературу по выбранной теме, были выдвинуты **гипотезы:**

Все достижения в области математики вытекают из практических потребностей. Потом происходит систематизация накопленных знаний и как следствие их развитие.

При изучении истории египетских пирамид, меня заинтересовали математические знания, которые использовали египтяне, в частности применение «египетского треугольника» при построении прямого угла. Я пришел к выводу, что с этого треугольника началась история теоремы Пифагора, которую я решил проследить. Я предположил, что существуют различные интерпретации теоремы Пифагора. Одна из них заключается в том, что соотношение для площадей квадратов сохранится при замене квадратов любыми подобными фигурами. Я самостоятельно доказал теорему. Сделал предположение о существовании формул, с помощью которых можно вычислить «Пифагоровы тройки». Я постарался найти примеры более широкого применения теоремы, например, при вычислении длины спирали.

Задачи:

1. Самостоятельно доказать теорему Пифагора
2. Вывести формулы с помощью которых можно находить Пифагоровы тройки.
3. Наглядно проиллюстрировать доказательство теоремы Пифагора.
4. Доказать, что соотношения для площадей сформулированные в теореме Пифагора - сохраняются при замене квадратов любыми подобными фигурами
5. Рассмотреть практическое применение теоремы Пифагора.

Цель: самостоятельно доказать и наглядно проиллюстрировать теорему Пифагора, доказать тот факт, что соотношения для площадей сформулированные в теореме Пифагора – сохраняются при замене квадратов любыми подобными фигурами, а также выяснить области применения теоремы **Пифагора**.

С греческих учёных началась «настоящая математика». Они очень любили спорить. Считали, что спор помогает найти самое правильное решение «в споре рождается истина». Они не просто заучивали правила, а доискивались причин: почему правильно делать так, а не иначе?

Пифагор верил, что всё на свете связано с числами. Поэтому он и его последователи считали, что, изучая свойства чисел, можно разгадать все тайны мироздания. Теорема – это уже не правило, а закон.

Школа Пифагора много сделала, чтобы придать геометрии характер науки. Основной особенностью метода Пифагора было объединение геометрии с арифметикой.

Тайны Природы запечатлены в геометрических фигурах и числах – символах. Некоторые из них принесены с Востока Пифагором. Его знаменитый «Треугольник» (Тетрактис), вместе с «Квадратом» (Тетраграмматом) и Кругом (Беспредельной Бесконечностью).

Существует более 100 различных доказательств теоремы Пифагора.

Мы представляем два из них.

«Квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов».

$$c^2 = a^2 + b^2$$

Мы самостоятельно доказали теорему Пифагора.

1. Доказательство

Одно из них основано на том, что прямоугольный треугольник помещен на координатную плоскость и с использованием координат точек вычисляют теорему Пифагора.

Прямоугольный треугольник помещаем в прямоугольную координатную плоскость следующим образом (рисунок 1).

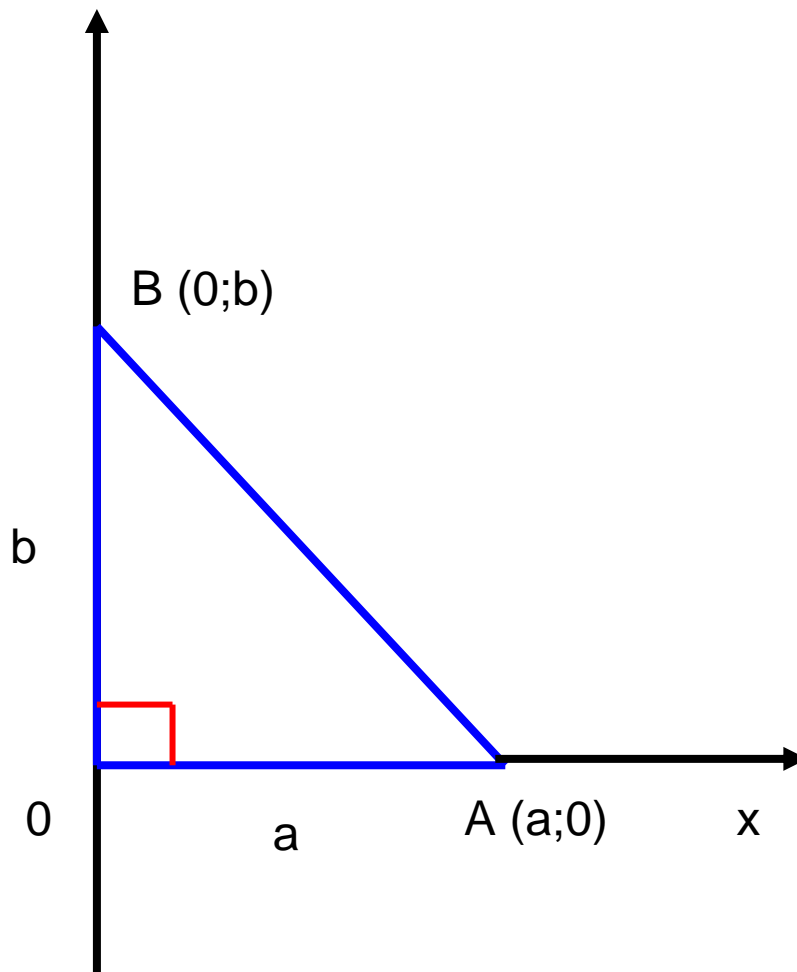


Рис.1

Один катет совпадает с осью x , другой осью y . Вершина $A(a;0)$; $B(0;b)$
 Расстояние между точками $(-a)^2 = a^2$

$$AB^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

$$AB^2 = (0 - a)^2 + (b - 0)^2$$

$$AB^2 = a^2 + b^2$$

$$c^2 = a^2 + b^2$$

2. Доказательство

Во втором доказательстве в большой квадрат помещают 1 маленький квадрат и 4-е прямоугольных треугольника (рисунок 2).

Площадь квадрата ABCD

$$S = c^2$$

$$S = 4 \times \frac{1}{2} ab + (a - b)^2 =$$

$$= 2ab + a^2 - 2ab + b^2 = a^2 + b^2$$

$$c^2 = a^2 + b^2$$

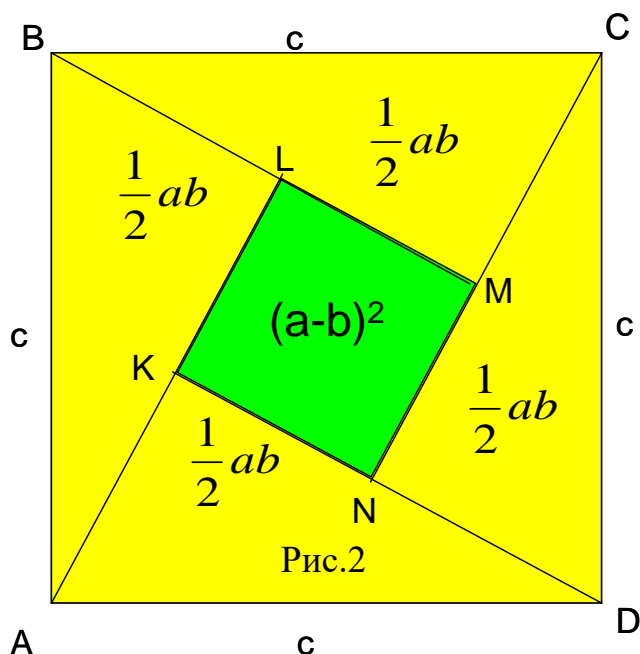


Рис.2

Далее мы выяснили, что числа которые удовлетворяют равенству $c^2 = a^2 + b^2$, называют «Пифагоровы тройки».

$$3, 4, 5 \quad 5^2 = 3^2 + 4^2 \quad (25=9+16)$$

$$6, 8, 10 \quad 10^2 = 6^2 + 8^2 \quad (100 = 36+64)$$

$$9, 12, 15 \quad 15^2 = 9^2 + 12^2 \quad (225=144+81)$$

Прямоугольный треугольник вписан в окружность. Гипотенуза является диаметром окружности. Все треугольники со сторонами к5; к3; к4 – впишем в окружности. Получится эффект «сигнальных лампочек». Таким образом, все прямоугольные треугольника с пифагоровыми тройками впишем в окружности. В результате образуется конус.

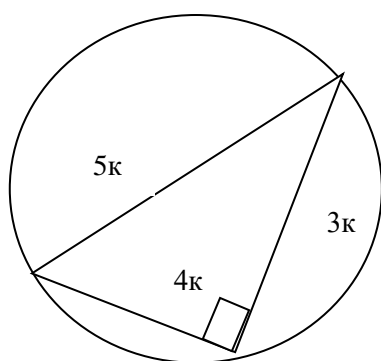


Рис. 3

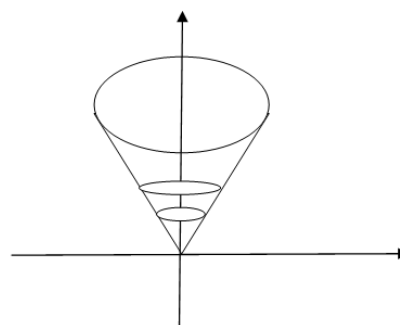


Рис.4

Далее представлен вывод формул.

$$a^2 + b^2 = c^2 \quad a^2 = c^2 - b^2 \quad a^2 = (c - b) (c + b)$$

Исходя из анализа данных, каждый множитель можно представить в виде квадрата

$$1) \ c + b = m^2 \text{ и } 2) \ c - b = n^2$$

$$a^2 = m^2 \cdot n^2$$

Если сложить 1) и 2) выражение, то получим

$$2c = m^2 + n^2$$

$$c = \frac{m^2 + n^2}{2}$$

Если вычесть из 1) выражения 2) выражение, то получим

$$2b = m^2 - n^2$$

$$b = \frac{m^2 - n^2}{2}$$

Мы нашли формулы, с помощью которых можно находить Пифагоровы тройки.

Пифагоровы числа имеют вид

$$a = mn \quad b = \frac{m^2 - n^2}{2} \quad c = \frac{m^2 + n^2}{2}$$

где m и n – некоторые взаимно простые нечетные числа.

И вывели Таблицу пифагоровых чисел, которая представлена на сайте.

a	b	c
3	4	5
5	12	13
7	24	25
9	40	41
11	60	61
13	84	85
15	8	17
21	20	29
33	56	65
39	80	89
35	12	37
45	28	53
55	48	73
5	72	97

Попробуем наглядно проиллюстрировать знаменитую теорему Пифагора.

Рассмотрим несколько устройств, которые находятся в японском музее.

- В середине первого устройства — прямоугольный треугольник, к каждой его стороне прикреплён квадрат. Внутри налита окрашенная жидкость.

Когда конструкция поворачивается, жидкость перетекает из двух меньших квадратов в большой (рисунок 5).

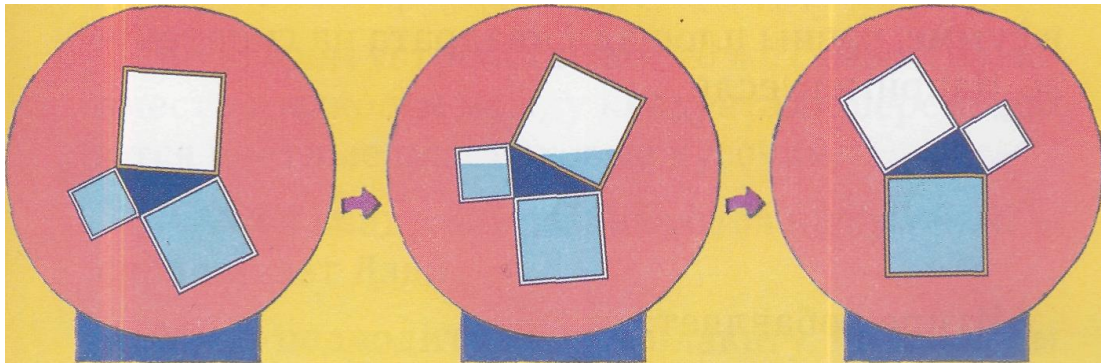


Рис.5.

В тот самый момент, когда большой квадрат оказывается наполнен до конца, два других совсем пусты.

Если большой квадрат обозначить через переменную **Z**. А два других через переменные **X** и **y**. То можно увидеть связь с теоремой Пифагора

$$X^2 + y^2 = Z^2$$

Когда жидкость наполняет большой квадрат целиком, маленькие квадраты пусты. Это и подтверждает наглядно знаменитую теорему Пифагора.

Посмотрим на следующий рисунок (рисунок 6). Здесь та же картина, только вместо жидкости между квадратами перемещаются цветные пластиковые кусочки.

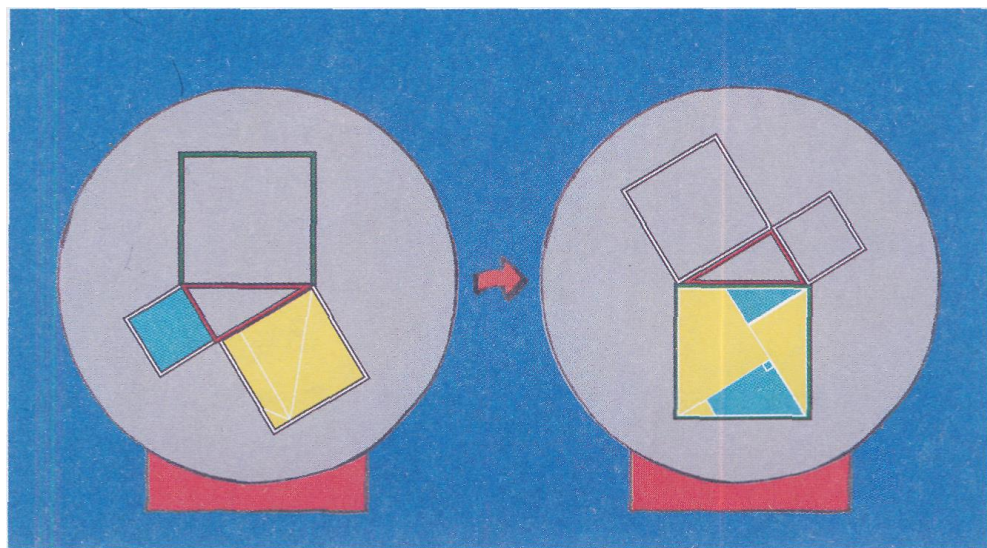


Рис.6.

На следующем рисунке показано, каким образом реализовано это разбиение (рисунок 7).

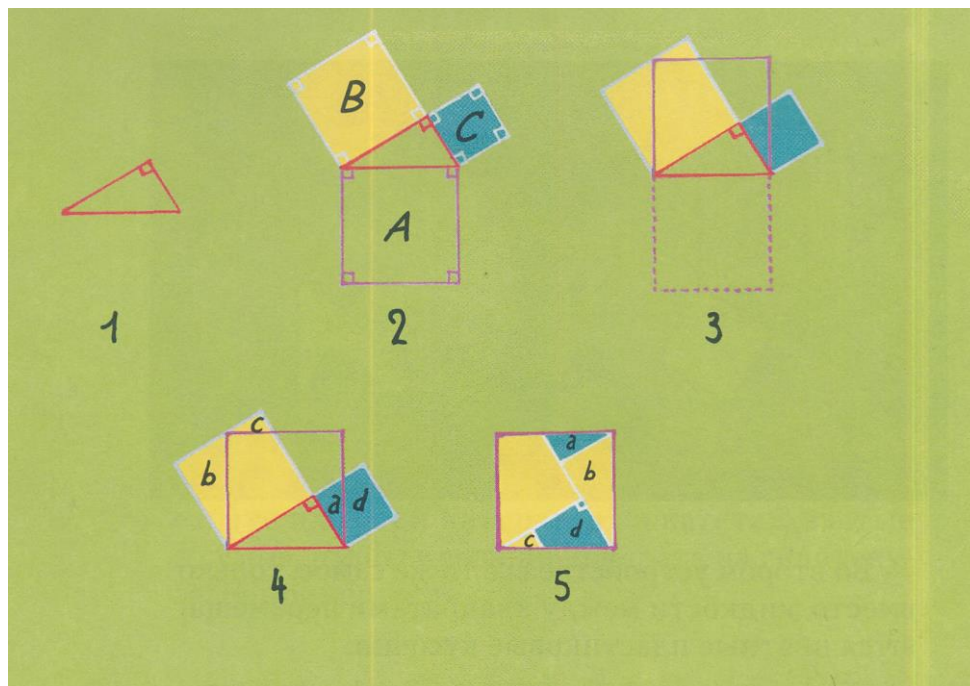


Рис.7.

Говорят, что Пифагор все это придумал, когда он рассматривал мозаичный пол (Рисунок 8).

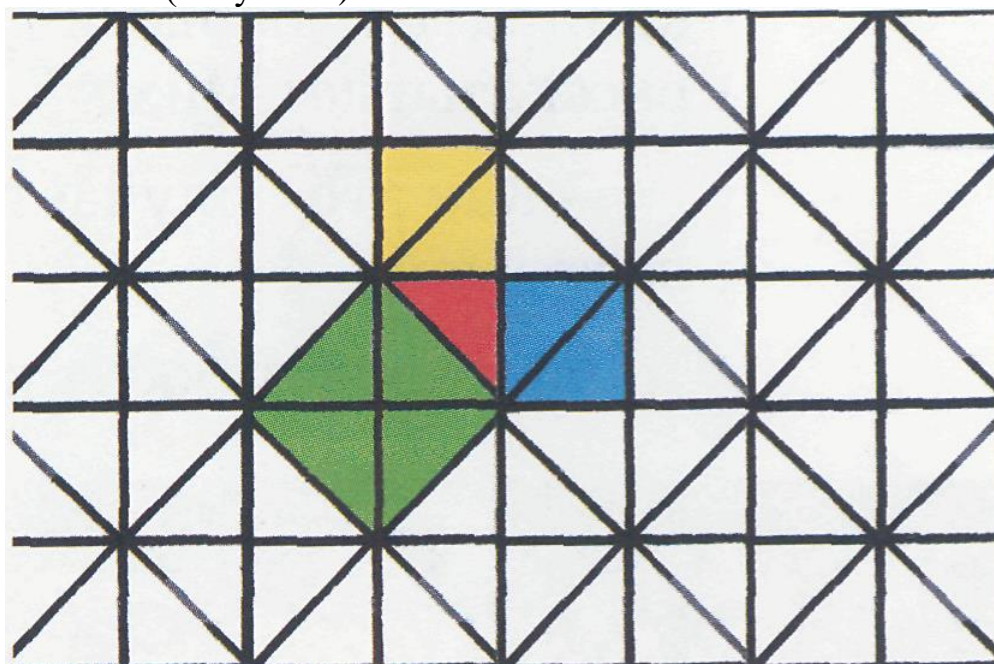


Рис.8.

Мы открыли еще один интересный факт!
Посмотрим на следующий рисунок (Рисунок 9).

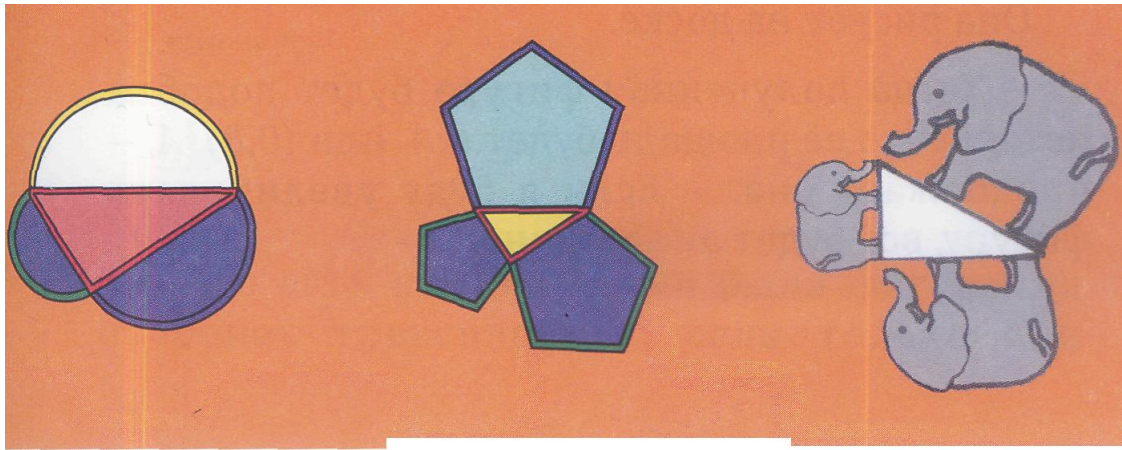


Рис. 9

В центре всех фигур прямоугольные треугольники, а вокруг них произвольные фигуры.

Это может быть полукруг, пятиугольник и даже слон!

Теорему можно обобщить: соотношения для площадей сформулированные в теореме Пифагора - сохраняются при замене квадратов любыми подобными фигурами.

Докажем это.

Вспомним принцип, который действует в копировальной машине, когда она по нашему желанию уменьшает или увеличивает изображение. Допустим, у нас есть фигура с площадью A , и мы хотим, чтобы она была уменьшена на 20 процентов. Тогда полученная фигура будет подобна исходной, а её площадь будет t^2A , или $(0,8)^2A$.

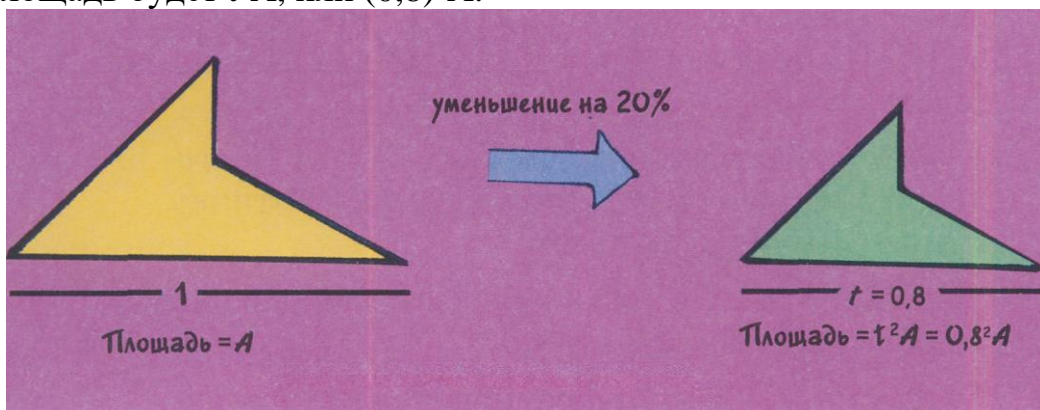


Рис. 10

Допустим, у нас есть фигура площадью A . Увеличим ее в 3 раза и прикрепим к катету со стороны 3. Ее площадь 3^2A .

Эту же фигуру увеличим в 4 раза и прикрепим к катету со стороны 4. Ее площадь 4^2A . И еще раз увеличим фигуру в 5 раз и прикрепим к катету со стороны 5. Ее площадь 5^2A .

Тогда $3^2 A + 4^2 A = (3^2 + 4^2)A = 5^2 A$.

$$25A = 25A$$

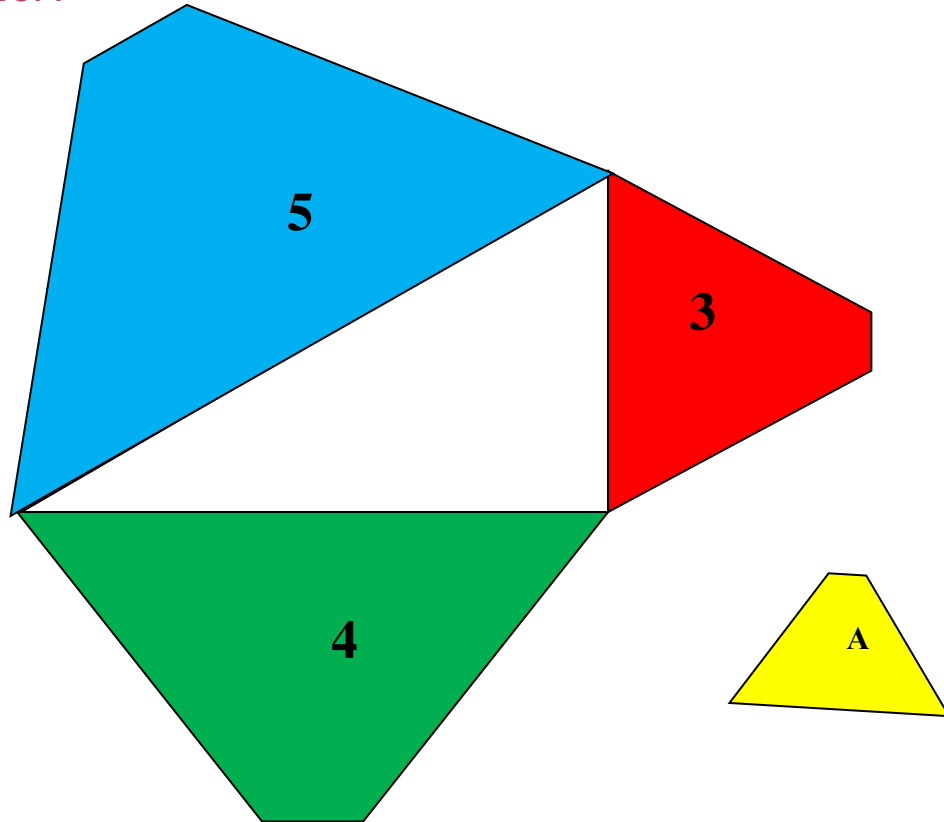


Рис. 11

На сторонах прямоугольного треугольника можно построить фигуры, подобные исходной. Отношение площадей зависит от отношения сторон треугольника. Теорема Пифагора утверждает, что

$x^2 + y^2 = z^2$, если умножить обе части равенства на одно и то же число A , то получим

$$x^2 A + y^2 A = (x^2 + y^2)A = z^2 A. (\text{Рисунок 12})$$

То есть, каковы бы ни были фигуры на сторонах треугольника, если только они подобны друг другу, а их линейные размеры пропорциональны сторонам треугольника, то сумма площадей фигур на катетах будет равна площади фигуры на гипотенузе.

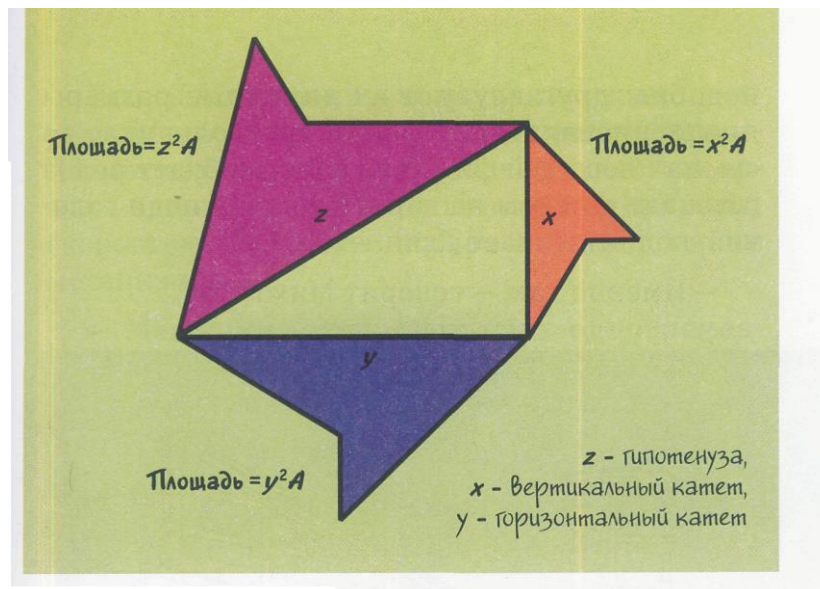


Рис.12

Рассмотрим примеры практического применения теоремы Пифагора. Не будем пытаться привести все примеры использования теоремы - это вряд ли было бы возможно. Область применения теоремы достаточно обширна и вообще не может быть указана с достаточной полнотой, вот некоторые из них:

- ✓ теорема Пифагора применяется для вычисления длин отрезков некоторых фигур на плоскости и в пространстве;

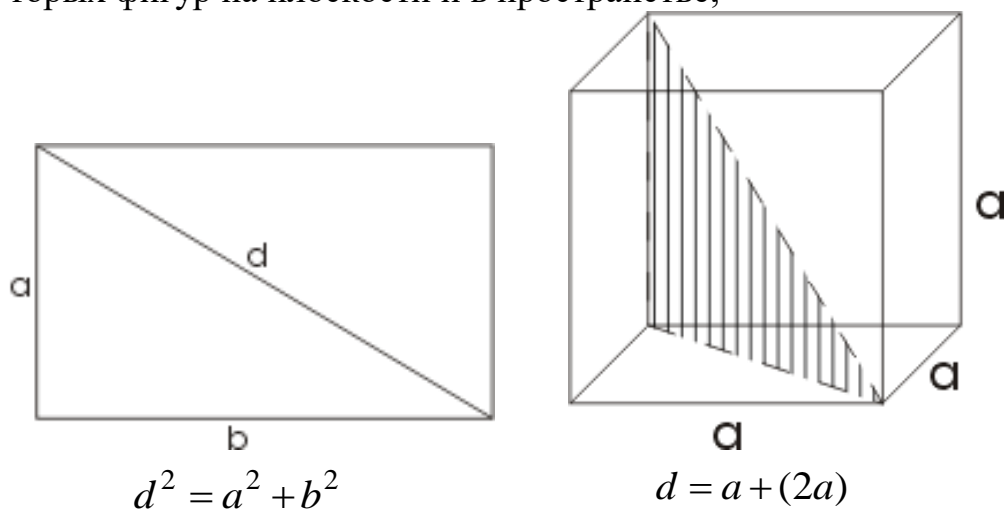
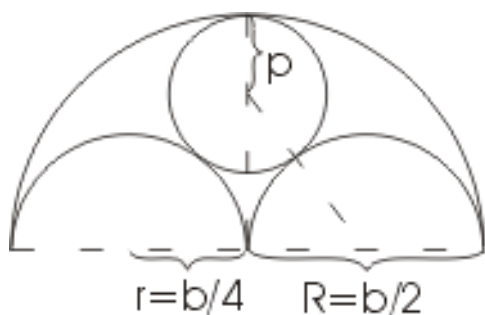


Рис.13

- ✓ в строительстве и архитектуре (в некоторых зданий готического и романского стиля);



Собор Парижской Богоматери. Западный фасад.

Рис.14

✓ с помощью теоремы Пифагора можно посчитать длину спирали.

Последнюю область применения теоремы рассмотрим более подробно. В японском музее в зале Пифагора есть еще одно устройство.

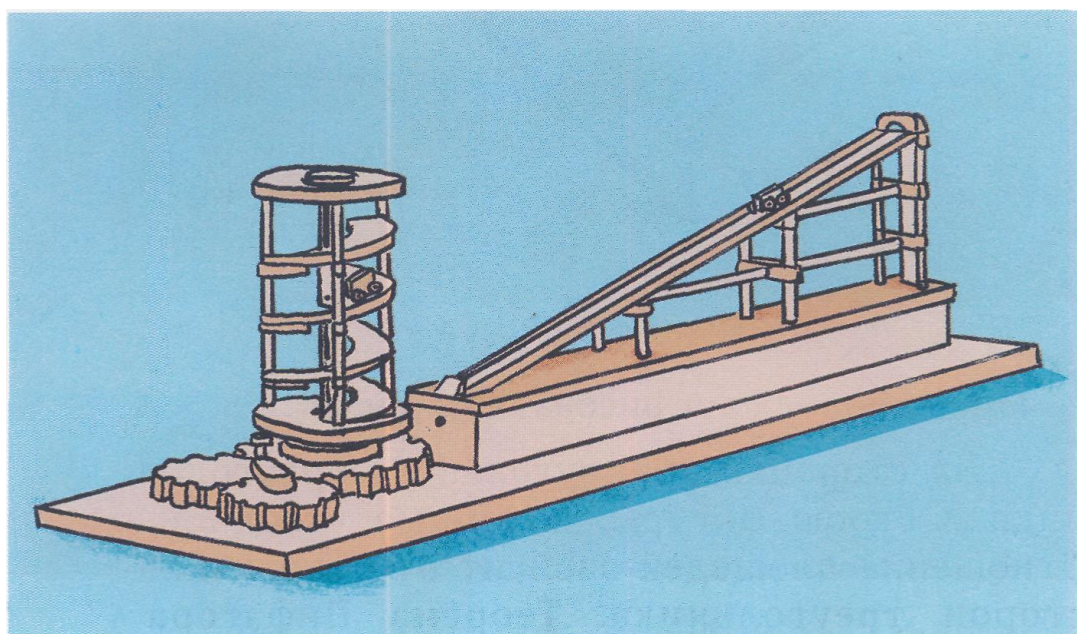


Рис. 15

В устройстве движутся две игрушечные машинки. Одна ездит вверх и вниз по прямой горке, а другая — по винтообразной горке внутри цилиндра.

Это демонстрация того, как можно измерить длину спирали. Машинки начинают съезжать одновременно и двигаются с одинаковой скоростью. Их движение управляется этим механизмом. Машинки приезжают вниз одновременно. Это значит, что длина спирали равна длине этого прямого бруска.

Посмотрим на следующий рисунок (Рис. 16).

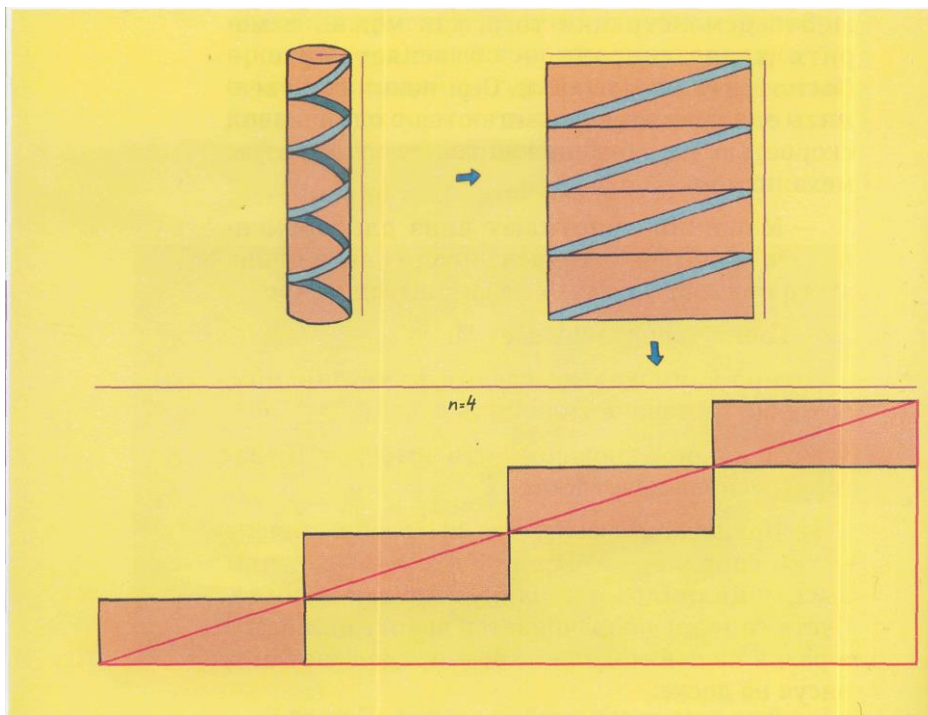


Рис. 16

Попробуем представить, что распрямляются витки спирали. Обозначим высоту цилиндра h , а радиус его основания r . Пусть спираль оборачивается вокруг цилиндра n раз; в нашей модели $n=4$.

Ширина каждой развернутой секции спирали равна окружности основания цилиндра. Если составить вместе все развернутые секции так, чтобы диагонали образовали прямую, то получится прямоугольный треугольник с катетами длины h и $n2\pi r$.

Тогда по теореме Пифагора длина спирали равна

$$L^2 = (n2\pi r)^2 + h^2$$

Проведен практический эксперимент.

Рассчитана, длинна окружности для цилиндра радиусом $R=3,75$ см и высотой $h=11$ для

N=3	N=4	N=5
$L^2 = (3 * 2\pi * 3,75)^2 + 11^2 = 5112,4225$	$L^2 = (4 * 2\pi * 3,75)^2 + 11^2 = 8994,64$	$L^2 = (5 * 2\pi * 3,75)^2 + 11^2 = 13986,06$
$L = \sqrt{5112,4225} = 71,5$	$L = \sqrt{8994,64} = 94,8$	$L = \sqrt{13986,06} = 118,26$

Выводы:

Результатом нашей работы является:

- ✓ приобретение навыка работы с литературными источниками;
- ✓ навык работы с большим объёмом информации, и последующим анализом и систематизации нужной информации;
- ✓ наглядного и доступного объяснения теоремы Пифагора
- ✓ доказательство того факта, что соотношения для площадей сформулированные в теореме Пифагора – сохраняются при замене квадратов любыми подобными фигурами.

СПИСОК ИСПОЛЬЗУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Г.И. Глейзер. История математики в школе, М: «Просвещение», 1982 г.
2. Изучаем теорему Пифагора// Математика.- №24. – 2001. –с1-48.
3. Афанасьев В. Продолжение теоремы Пифагора// Математика. - №5. – 1999. –с 22, 23.
4. Волошинов А.В. Союз математики и эстетики.// Математика в школе. - №7. – 2006. – с 62-65.