

Методы решения
тригонометрических уравнений

МИНИ-ПОСОБИЕ

Содержание

1. Тригонометрические уравнения	3
1.1. Определение тригонометрического уравнения.....	3
1.2. Простейшие тригонометрические уравнения	3
1.2.1. $\cos x = a$	3
1.2.2. $\sin x = a$	3
1.2.3. $\operatorname{tg} x = a$	3
1.2.4. $\operatorname{ctg} x = a$	4
1.3. Тригонометрические уравнения, сводящиеся к простейшим	4
1.3.1. Формулы приведения.....	4
1.4. Тригонометрические тождества.....	5
2. Основные методы решения тригонометрических уравнений.....	5
2.1. Метод замены переменной	5
2.2. Метод сведения к квадратному уравнению	6
2.3. Метод разложения на множители.....	6
2.3.1. Метод группировки.....	7
2.4. Однородные тригонометрические уравнения.....	8
2.4.1. Уравнения, сводящиеся к однородным тригонометрическим	8
3. Преобразование тригонометрических выражений	8
3.1. Синус и косинус суммы и разности аргументов.....	8
3.1.1. Тангенс суммы и разности аргументов.....	9
3.2. Преобразование суммы одноименных функций в произведение	9
3.3. Преобразование произведения одноименных функций в сумму	10
3.4. Тригонометрические функции удвоения и деления аргумента пополам. 10	
3.4.1. Универсальная подстановка.....	11
3.5. Преобразование выражения вида $A \sin x + B \cos x$ к виду $C \sin(x+t)$	12
4. Методы решения тригонометрических уравнений (продолжение)	12
4.1. Метод оценок.....	12
4.2. Графический метод.....	13

1. Тригонометрические уравнения

1.1. Определение тригонометрического уравнения

Тригонометрическим уравнением называется уравнение, содержащее переменную под знаком тригонометрических функций.

1.2. Простейшие тригонометрические уравнения

Практически все тригонометрические уравнения считаются «сводящимися к простейшим», но можно выделить ряд уравнений которые сводятся к простейшим достаточно просто. Рассмотрим сначала виды простейших уравнений.

К простейшим тригонометрическим уравнениям относятся уравнения вида:

$$\sin x = a, \cos x = a, \operatorname{tg} x = a, \operatorname{ctg} x = a.$$

На эти уравнения следует обратить особое внимание, так как без умения их решать невозможно решить никакое другое тригонометрическое уравнение.

1.2.1. $\cos x = a$:

- 1) не имеет решений, если $a > |1|$;
- 2) если $a < |1|$, то $x = \pm \arccos a + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$;
- 3) частные случаи:

a. $\cos x = 0, x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$;

b. $\cos x = 1, x = 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$;

c. $\cos x = -1, x = \pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$.

1.2.2. $\sin x = a$:

- 1) не имеет решений, если $a > |1|$;
- 2) если $a < |1|$, то $x = (-1)^n \arcsin a + \pi n, n \in \mathbb{Z}$;
($x = \arcsin a + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$; $x = \pi - \arcsin a + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$)
- 3) частные случаи:

a. $\sin x = 0, x = \pi n, n \in \mathbb{Z}$;

b. $\sin x = 1, x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$;

c. $\sin x = -1, x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$.

1.2.3. $\operatorname{tg} x = a$:

$$x = \operatorname{arctg} a + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

1.2.4. $\operatorname{ctg} x = a$:

$$x = \operatorname{arccctg} a + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

1.3. Тригонометрические уравнения, сводящиеся к простейшим

1.3.1. Формулы приведения

Формулами приведения называются формулы, выражающие тригонометрические функции от аргументов: $-\alpha$, $\frac{\pi}{2} \pm \alpha$, $\frac{3\pi}{2} \pm \alpha$, $2\pi \pm \alpha$

Таблица формул приведения:

Функция Аргумент Раднаны (градусы)	cos	sin	tg	ctg	
1 $-\alpha$	$\cos \alpha$	$-\sin \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$	$-\operatorname{ctg} \alpha$	
2 $\frac{\pi}{2} + \alpha$ ($90^\circ + \alpha$)	$-\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$-\operatorname{ctg} \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$	
3 $\frac{\pi}{2} - \alpha$ ($90^\circ - \alpha$)	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\operatorname{ctg} \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$	
4 $\pi + \alpha$ ($180^\circ + \alpha$)	$-\cos \alpha$	$-\sin \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{ctg} \alpha$	
5 $\pi - \alpha$ ($180^\circ - \alpha$)	$-\cos \alpha$	$\sin \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$	$-\operatorname{ctg} \alpha$	
6 $\frac{3}{2}\pi + \alpha$ ($270^\circ + \alpha$)	$\sin \alpha$	$-\cos \alpha$	$-\operatorname{ctg} \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$	
7 $\frac{3}{2}\pi - \alpha$ ($270^\circ - \alpha$)	$-\sin \alpha$	$-\cos \alpha$	$\operatorname{ctg} \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$	
8 $2\pi + \alpha$ ($360^\circ + \alpha$)	$\cos \alpha$	$\sin \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{ctg} \alpha$	
9 $2\pi - \alpha$ ($360^\circ - \alpha$)	$\cos \alpha$	$-\sin \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$	$-\operatorname{ctg} \alpha$	

При пользовании формулами приведения можно пользоваться правилами:

1) если угол α откладывается от горизонтального диаметра, то в обеих частях формулы функция имеет одно и то же название; от вертикального – функция меняет название на сходное;

2) знак приведенной функции совпадает со знаком приводимой функции, т.е. чтобы определить знак, с которым следует брать функцию в правой части, достаточно, считая угол острым, определить знак по знаку левой части.

Пример: 1) $\sin(2\pi - x) = -\sin x$;

2) $\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$;

$$\begin{cases} 2x - \frac{\pi}{3} = \arcsin \frac{1}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \\ 2x - \frac{\pi}{3} = \pi - \arcsin \frac{1}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \end{cases} \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{7\pi}{12} + \pi n, n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

1.4. Тригонометрические тождества

1. $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$.

2. $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$.

3. $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$.

4. $1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$.

5. $1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$.

6. $\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1$.

Эти тождества имеют фундаментальное значение в курсе тригонометрии. При их рассмотрении существенно подчеркнуть следующее:

а. В старших классах средней школы изучаются тригонометрические функции действительного аргумента;

б. Тригонометрические тождества могут быть использованы для преобразования тригонометрических выражений;

в. Зная значение одной из тригонометрических функций, можно, используя основные тригонометрические тождества, вычислить значения остальных функций.

Пример: $(1 + \sin(2,4))(1 - \sin(2,4)) = 1 - \sin^2(2,4) = \cos^2(2,4) \approx 0,54$.

2. Основные методы решения тригонометрических уравнений

2.1. Метод замены переменной

Этот метод вам хорошо известен, вы не раз применяли его при решении различных уравнений.

Пример : решить уравнение $2 \sin^2 x - 5 \sin x + 2 = 0$

Решение: Введем новую переменную: $z = \sin x$.

Тогда уравнение примет вид $2z^2 - 5z + 2 = 0$ откуда находим: $z_1 = 2$, $z_2 = \frac{1}{2}$.
Значит, либо $\sin x = 2$, либо $\sin x = \frac{1}{2}$. Первое из этих уравнений не

имеет решений, а для второго получаем: $x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n$.

2.2. Метод сведения к квадратному уравнению

Он заключается в том, что все тригонометрические функции, которые входят в уравнение, выражают через какую-нибудь одну тригонометрическую функцию, зависящую от одного и того же аргумента.

Пример:

$$4 \sin^4 x - 2 \sin^2 x \cos x + 4 \cos 2x = 2 \cos^3 x - \sin^2 2x + 2.$$

Решение. Перейдем к функции $\cos x$.

$$4(1 - \cos^2 x)^2 - 2(1 - \cos^2 x)\cos x + 4(2\cos^2 x - 1) = 2\cos^3 x - 4\cos^2 x(1 - \cos^2 x) + 2,$$

$$\text{т.е. } 4 - 8\cos^2 x + 4\cos^4 x - 2\cos x + 2\cos^3 x + 8\cos^2 x - 4 - 2\cos^3 x + 4\cos^2 x - 4\cos^4 x - 2 = 0,$$

$$\text{т.е. } 4\cos x - 2\cos x - 2 = 0, \quad \text{т.е. } 2\cos^2 x - \cos x - 1 = 0 \Rightarrow$$

$$\cos x = 1 \quad \text{и} \quad \cos x = -\frac{1}{2}.$$

$$\text{Ответ: } x = 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z} \quad \text{и} \quad x = \pm \frac{2}{3}\pi + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

2.3. Метод разложения на множители

При решении уравнений такого типа необходимо пользоваться известным правилом: произведение нескольких множителей равно нулю, если хотя бы один из них равен нулю, а остальные при этом имеют смысл.

Примеры:

$$1. \cos x(3\operatorname{tg} x - 5) = 0.$$

Используя данное правило получим:

$$\begin{cases} \cos x = 0 & 3\operatorname{tg} x = 5, \\ \cos x \neq 0 & \text{или} \quad x = \operatorname{arctg} \frac{5}{3} + \pi m, m \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

$$2. 4\cos x \sin x + 2\cos x + 2\sin x + 1 = 0.$$

Сгруппируем соответствующие слагаемые, получим:

$$(2\cos x + 1)(2\sin x + 1) = 0,$$

$$x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z},$$

$$x = (-1)^{k+1} \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

2.3.1. Метод группировки

Путем группировки слагаемых уравнение привести к виду, когда левая часть разложена на множители, а правая часть равна нулю. Уравнение распадается на несколько более простых уравнений.

Примеры. 1) $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 1 + \cos x + \cos 2x$.

Решение. Запишем уравнение в другом виде

$$(\sin x + \sin 3x) + \sin 2x = (1 + \cos 2x) + \cos x,$$

$$\text{т.е. } 2 \sin 2x \cos x + \sin 2x = 2 \cos^2 x + \cos x,$$

$$\text{т.е. } \sin 2x(2 \cos x + 1) - \cos x(2 \cos x + 1) = 0,$$

$$\text{т.е. } (2 \cos x + 1)(\sin 2x - \cos x) = 0,$$

$$\text{но } \sin 2x = 2 \sin x \cos x, \text{ поэтому } (2 \cos x + 1) \cdot \cos x \cdot (2 \sin x - 1) = 0.$$

Отсюда

$$\left. \begin{array}{l} 2 \cos x + 1 = 0; \\ \cos x = -\frac{1}{2}; \\ x = \pm \frac{2}{3} \pi + 2\pi k, \end{array} \right| \left. \begin{array}{l} \cos x = 0; \\ x = \frac{\pi}{2} + \pi n, \end{array} \right| \left. \begin{array}{l} 2 \sin x - 1 = 0; \\ \sin x = \frac{1}{2}; \\ x = (-1)^m \frac{\pi}{6} + \pi m. \end{array} \right.$$

Ответ:

$$x = \pm \frac{2}{3} \pi + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z};$$

$$x = \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z};$$

$$x = (-1)^m \frac{\pi}{6} + \pi m, \quad m \in \mathbb{Z}.$$

$$2) \cos^4 \frac{x}{2} - \sin^4 \frac{x}{2} = \sin 2x.$$

Решение.

$$\left(\cos^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2} \right) \left(\cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2} \right) = 2 \sin x \cos x,$$

$$\text{т.е. } 1 \cos x - 2 \sin x \cos x = \cos x(1 - 2 \sin x) = 0.$$

Отсюда $\cos x = 0$ и $\sin x = \frac{1}{2}$. Следовательно, получаем

$$\text{Ответ: } x = \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}; \quad x = (-1)^m \frac{\pi}{6} + \pi m, \quad m \in \mathbb{Z}.$$

2.4. Однородные тригонометрические уравнения

Однородные уравнения, т.е. уравнения вида

$$a \cos x + b \sin x = 0,$$

$$a \cos^2 x + b \sin x \cos x + c \sin^2 x = 0$$

и т.д. (у всех слагаемых сумма показателей одинакова) приводятся к алгебраическим относительно $\operatorname{tg} x$ путем деления обеих частей уравнения на $\cos x \neq 0$, $\cos^2 x \neq 0$ соответственно.

Примеры : 1) $\sin^2 x - 2 \sin x \cos x - 3 \cos^2 x = 0$

Решение: Делим обе части уравнения на $\cos^2 x \neq 0$.

Получаем $\operatorname{tg}^2 x - 2 \operatorname{tg} x - 3 = 0$, $\operatorname{tg} x = 3$, $\operatorname{tg} x = -1$.

Отсюда сразу следует

Ответ: $x = \operatorname{arctg} 3 + \pi n$ и $x = -\frac{\pi}{4} + \pi k$, $k, n \in \mathbb{Z}$.

2) $3 \sin x \cos x - 2 \cos^2 x = 0$.

Решение: Это однородное уравнение, но делить на $\cos x$ нельзя, так как $\cos x$ может быть равен нулю.

Запишем уравнение иначе: $\cos x (3 \sin x - 2 \cos x) = 0$.

Отсюда $\cos x = 0$, $(x = \frac{\pi}{2} + \pi n)$ и $3 \sin x - 2 \cos x = 0$, - однородное уравнение первой степени. Разделим на $\cos x \neq 0$, $3 \operatorname{tg} x - 2 = 0$, $\operatorname{tg} x = \frac{2}{3}$, $x = \operatorname{arctg} \frac{2}{3} + \pi k$.

2.4.1. Уравнения, сводящиеся к однородным тригонометрическим

Рассмотрим уравнение $10 \sin^2 x + 5 \sin x \cos x + \cos^2 x = 3$.

Если бы в правой части стоял нуль, уравнение было бы однородным. Мы поправим ситуацию изящным приёмом: заменим число 3 на выражение $3(\sin^2 x + \cos^2 x)$:
 $10 \sin^2 x + 5 \sin x \cos x + \cos^2 x = 3(\sin^2 x + \cos^2 x)$, $7 \sin^2 x + 5 \sin x \cos x - 2 \cos^2 x = 0$.

(Дальнейшее решение см. пункт 3.4.)

3. Преобразование тригонометрических выражений

3.1. Синус и косинус суммы и разности аргументов

Теоремы сложения в тригонометрии устанавливают формулы, по которым можно, зная значения тригонометрических функций от аргументов α и β , вычислять тригонометрические функции от суммы и разности $\alpha \pm \beta$ этих аргументов.

Теорема. Косинус суммы (разности) двух аргументов равен произведению косинусов минус (плюс) произведение синусов данных аргументов:

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta.$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta.$$

Теорема. Синус суммы (разности) двух аргументов равен произведению синуса первого аргумента на косинус второго плюс (минус) произведение косинуса первого аргумента на синус второго:

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta.$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta.$$

3.1.1. Тангенс суммы и разности аргументов

$$\operatorname{tg}(x + y) = \frac{\sin(x+y)}{\cos(x+y)} = \frac{\sin x \cos y + \cos x \sin y}{\cos x \cos y - \sin x \sin y}$$

Разделив почленно числитель и знаменатель на $\cos x \cos y \neq 0$,

$$\text{получим формулу } \operatorname{tg}(x + y) = \frac{\frac{\sin x \cos y}{\cos x \cos y} + \frac{\cos x \sin y}{\cos x \cos y}}{\frac{\cos x \cos y}{\cos x \cos y} - \frac{\sin x \sin y}{\cos x \cos y}} = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y}.$$

Заменим в формуле y на $-y$ и воспользуемся свойством нечетности тангенса, тогда получим: $\operatorname{tg}(x - y) = \operatorname{tg}[x + (-y)] = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg}(-y)}{1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg}(-y)} = \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y}{1 + \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y}.$

$$\operatorname{tg}(x + y) = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y}$$

$$\operatorname{tg}(x - y) = \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y}{1 + \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y}$$

3.2. Преобразование суммы одноименных функций в произведение

Преобразование суммы одноименных функций в произведение

$(\sin \alpha \pm \sin \beta, \cos \alpha \pm \cos \beta)$ базируется на решении системы линейных уравнений

$$\begin{cases} x + y = \alpha \\ x - y = \beta. \end{cases} \quad (1)$$

Такая система имеет единственное решение $\left(\frac{\alpha+\beta}{2}, \frac{\alpha-\beta}{2}\right)$. Используя решение системы (1) и уже известные формулы сложения, получим формулы для преобразования $\sin \alpha \pm \sin \beta, \cos \alpha \pm \cos \beta$ в произведение. Рассмотрим, например, $\cos \alpha + \cos \beta$. Заменим α на $x + y$, β на $x - y$.

Тогда $\cos \alpha + \cos \beta = \cos(x + y) + \cos(x - y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y + \cos x \cos y + \sin x \sin y = 2 \cos x \cos y$. Учитывая, что $(x; y)$ – решение системы уравнений (1), получим $\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha+\beta}{2} \cos \frac{\alpha-\beta}{2}$.

Аналогично получим формулы для $\sin \alpha \pm \sin \beta$, $\cos \alpha - \cos \beta$.

$$\sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cdot \cos \frac{x-y}{2}$$

$$\sin x - \sin y = 2 \sin \frac{x-y}{2} \cdot \cos \frac{x+y}{2}$$

$$\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cdot \cos \frac{x-y}{2}$$

$$\cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x+y}{2} \cdot \sin \frac{x-y}{2}$$

Пример: преобразовать в произведение суммы разноименных функций $\sin x + \cos y$

$$\begin{aligned} \sin x + \cos y &= \cos \left(\frac{\pi}{2} - x \right) + \cos y = 2 \cos \frac{\frac{\pi}{2} - x + y}{2} \cos \frac{\frac{\pi}{2} - x - y}{2} = \\ &= 2 \cos \frac{\pi - 2x + 2y}{4} \cos \frac{\pi - 2x - 2y}{4}. \end{aligned}$$

3.3. Преобразование произведения одноименных функций в сумму

Из пункта 4.1. известно, что $\cos(x+y) + \cos(x-y) = 2 \cos x \cos y$, значит

$\cos x \cos y = \frac{\cos(x+y) + \cos(x-y)}{2}$. Аналогично получим формулы для $\sin x \cos y$, $\sin x \sin y$.

$$\sin x \cos y = \frac{\sin(x-y) + \sin(x+y)}{2}$$

$$\cos x \cos y = \frac{\cos(x-y) + \cos(x+y)}{2}$$

$$\sin x \sin y = \frac{\cos(x-y) - \cos(x+y)}{2}$$

Пример: решить $\sin 75^\circ \sin 15^\circ$

$$\sin 75^\circ \sin 15^\circ = \frac{\cos(75^\circ - 15^\circ) - \cos(75^\circ + 15^\circ)}{2} = \frac{\cos 60^\circ - \cos 90^\circ}{2} = \frac{\frac{1}{2} - 0}{2} = \frac{1}{4}.$$

3.4. Тригонометрические функции удвоения и деления аргумента пополам

Формулы удвоения аргумента выражают тригонометрические функции от двойного аргумента $2x$ через тригонометрические функции от аргумента x .

Положив в формулах сложения для косинуса $x = y$, получим:

$$\cos 2x = \cos(x+x) = \cos x \cos x - \sin x \sin x = \cos^2 x - \sin^2 x.$$

Положив $x = y$ в формулах сложения для синуса, получим:

$$\sin 2x = \sin x \cos x + \cos x \sin x = 2 \sin x \cos x$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$$

Аналогично выводится формула удвоения аргумента для тангенса:

$$\operatorname{tg} 2x = \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}$$

Формулы деления аргумента пополам выражают тригонометрические функции половинного аргумента $\frac{x}{2}$ через тригонометрические функции аргумента x .

Заменим в формуле косинуса двойного аргумента x половинным аргументом:

$$\cos x = \cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2} \quad (1)$$

Присоединив основное тождество

$$1 = \cos^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2} \quad (2)$$

сложим и вычтем почленно тождества (1) и (2); тогда получим:

$$2 \cos^2 \frac{x}{2} = 1 + \cos x; \quad 2 \sin^2 \frac{x}{2} = 1 - \cos x,$$

откуда найдем:

$$\cos \frac{x}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}} \quad (3)$$

$$\sin \frac{x}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}} \quad (4)$$

Разделив почленно тождество (4) на (3), получим:

$$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}}$$

Знаки перед радикалами выбираются в соответствии с тем, в какой четверти оканчивается угол $\frac{x}{2}$.

3.4.1. Универсальная подстановка

Запомним две важные формулы:

$$\sin x = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}, \quad \cos x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}.$$

Их ценность в том, что они позволяют выразить синус и косинус через одну и ту же функцию — тангенс половинного угла. Именно поэтому они получили название

универсальной подстановки. Единственная неприятность, о которой не надо забывать: правые части этих формул не определены при $x = \pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$. Поэтому если применение универсальной подстановки приводит к сужению ОДЗ, то данную серию нужно проверить непосредственно.

Пример:

Решим уравнение $\sin 2x + \operatorname{tg} x = 2$.

Выражаем $\sin 2x$, используя универсальную подстановку: $\frac{2\operatorname{tg} x}{1+\operatorname{tg}^2 x} + \operatorname{tg} x = 2$.

Делаем замену $t = \operatorname{tg} x$: $\frac{2t}{1+t^2} + t = 2$.

Получаем кубическое уравнение: $t^3 - 2t^2 + 3t - 2 = 0, (t-1)(t^2 - t + 2) = 0$.

3.5. Преобразование выражения вида $A \sin x + B \cos x$ к виду $C \sin(x+t)$

Рассмотрим выражение: $\sin x + \sqrt{3} \cos x$

1) Разделим оба слагаемых на 2 и вынесем за скобки: $2 \left(\frac{1}{2} \sin x + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos x \right)$

2) Заменяем, соответственно, $\frac{1}{2}$ и $\frac{\sqrt{3}}{2}$ на $\cos \frac{\pi}{3}$ и $\sin \frac{\pi}{3}$.

$$2 \left(\sin x \cos \frac{\pi}{3} + \cos x \sin \frac{\pi}{3} \right)$$

3) Свернем по формуле суммы аргументов косинуса $2 \sin \left(x + \frac{\pi}{3} \right)$

Итак, $\sin x + \sqrt{3} \cos x = 2 \sin \left(x + \frac{\pi}{3} \right)$.

4. Методы решения тригонометрических уравнений (продолжение)

4.1. Метод оценок

В некоторых уравнениях на помощь приходят оценки $-1 \leq \sin x \leq 1$,

$$-1 \leq \cos x \leq 1.$$

Рассмотрим уравнение: $\sin 5x + \sin 9x = 2$

Так как оба синуса не превосходят единицы, данное равенство может быть выполнено лишь в том случае, когда они равны единице одновременно:

$$\begin{cases} \sin 5x = 1, \\ \sin 9x = 1. \end{cases}$$

Таким образом, должны одновременно выполняться следующие равенства:

$$\begin{cases} 5x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n \\ 9x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{10} + \frac{2\pi n}{5}, \\ x = \frac{\pi}{18} + \frac{2\pi k}{9}, \end{cases} n, k \in \mathbb{Z}.$$

Обратите внимание, что сейчас идет речь о пересечении множества решений (а не об их объединении, как это было в случае разложения на множители). Нам еще предстоит понять, какие значения x удовлетворяют обоим равенствам. Имеем: $\frac{\pi}{10} + \frac{2\pi n}{5} = \frac{\pi}{18} + \frac{2\pi k}{9}$.

Умножаем обе части на 90 и сокращаем на π :

$$9 + 36n = 5 + 20k,$$

$$20k = 36n + 4,$$

$$5k = 9n + 1.$$

Правая часть, как видим, должна делиться на 5. Число n при делении на 5 может давать остатки от 0 до 4; иначе говоря, число n может иметь один из следующих пяти видов: $5m, 5m + 1, 5m + 2, 5m + 3, 5m + 4$, где $m \in \mathbb{Z}$.

Для того, чтобы $9n + 1$ делилось на 5, годится лишь $n = 5m + 1$.

Искать k , в принципе, уже не нужно. Сразу находим x :

$$x = \frac{\pi}{10} + \frac{2\pi n}{5} = \frac{\pi}{10} + \frac{2\pi(5m + 1)}{5} = \frac{\pi}{2} + 2\pi m.$$

Ответ: $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi m, m \in \mathbb{Z}$.

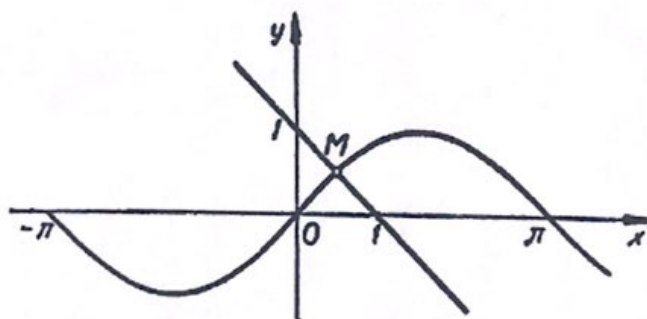
4.2. Графический метод

Уравнения, с которыми приходится сталкиваться при решении практических задач, как правило, значительно отличаются от тех, которые мы рассматривали. Для таких уравнений иногда вообще нельзя указать никакого способа, который позволял бы найти корни абсолютно точно. В таком случае приходится ограничиваться нахождением лишь приближенных значений корней. Современная математика располагает эффективными методами приближенного решения уравнений. Рассмотрим графический способ решения.

Например, $\sin x = 1 - x$.

На одном и том же рисунке начертим два графика: график функции

$y = \sin x$ и график функции $y = 1 - x$.



Эти графики пересекаются в одной точке М. Абсцисса этой точки и дает нам единственный корень нашего уравнения: $x \approx 0,5$.

