

Конспект «Формулы половинного аргумента»

Перечень вопросов, рассматриваемых в теме

- 1) Формулы синуса, косинуса, тангенса и котангенса половинного аргумента;
- 2) Преобразовывать тригонометрические выражений на основе использования формулы синуса, косинуса, тангенса и котангенса половинного аргумента;
- 3) Решение уравнения с использованием формулы синуса, косинуса половинного аргумента.

Глоссарий по теме

Формулы половинного угла (аргумента) представляют собой противоположность формулам двойного угла, так как они выражают синус, косинус, тангенс и котангенс угла $\frac{\alpha}{2}$ при помощи тригонометрических функций угла α .

Открытые электронные ресурсы:

Решу ЕГЭ образовательный портал для подготовки к экзаменам <https://ege.sdangia>.

Теоретический материал для самостоятельного изучения

Сегодня мы узнаем формулы, позволяющие нам по известным значениям $\sin \alpha$; $\cos \alpha$; $\operatorname{tg} \alpha$ и $\operatorname{ctg} \alpha$ находить $\sin \frac{\alpha}{2}$; $\cos \frac{\alpha}{2}$; $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$ и $\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}$. Их называют формулы половинного аргумента.

Повторим формулу косинуса двойного аргумента $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$.

А если учесть, что $\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha$ и $\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha$, то получим ещё две формулы, которые нам сегодня понадобятся:

$$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha \text{ и } \cos 2\alpha = 2\cos^2 \alpha - 1$$

Пример. а) Найти $\cos 2\alpha$, если $\sin \alpha = 0,2$.

Вычислим $\cos 2\alpha$ по формуле $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha = 1 - 2 \cdot 0,2^2 = 0,92$.

б) Найти $\cos 2\alpha$, если $\cos \alpha = -0,9$.

Вычислим $\cos 2\alpha$ по формуле $\cos 2\alpha = 2\cos^2 \alpha - 1 = 2 \cdot (-0,9)^2 - 1 = 0,62$.

- Запишем формулу косинуса двойного аргумента в виде $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$ и заменим x на $\frac{\alpha}{2}$. Тогда получим:
 $\cos \alpha = \cos^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2}$, учтём, что

$$\cos^2 \frac{\alpha}{2} = 1 - \sin^2 \frac{\alpha}{2}, \text{ получаем}$$

$$\cos \alpha = 1 - 2\sin^2 \frac{\alpha}{2}$$

$$2\sin^2 \frac{\alpha}{2} = 1 - \cos \alpha$$

$$\sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{2} \quad (1) \text{ формула синуса половинного аргумента.}$$

Запишем формулу косинуса двойного угла, где $\alpha = 2 \cdot \frac{\alpha}{2}$ в виде

$$\cos \alpha = 2\cos^2 \frac{\alpha}{2} - 1$$

$$2\cos^2 \frac{\alpha}{2} = \cos \alpha + 1$$

$$\cos^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{\cos \alpha + 1}{2} \quad (2) \text{ формула косинуса половинного угла.}$$

По формулам (1) и (2) можно найти $\sin \frac{\alpha}{2}$ или $\cos \frac{\alpha}{2}$, если известны значения $\sin \alpha$ или $\cos \alpha$ и положение угла α , т.е. в какой координатной четверти он находится, чтобы определить знак выражения $\sin \frac{\alpha}{2}$ или $\cos \frac{\alpha}{2}$.

Эти формулы ещё имеют название «формулы понижения степени», так как в левой части находится вторая степень синуса и косинуса, а в правой – первая, т.е. степень понизилась. Но будьте внимательны: степень понижается, а аргумент удваивается.

Например, $\cos^2 23^\circ = \frac{\cos 46^\circ + 1}{2}$.

Пример. Известно, что $\cos \alpha = 0,4, \frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$. Найдите $\sin \frac{\alpha}{2}$; $\cos \frac{\alpha}{2}$; $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$.

1) $\sin \frac{\alpha}{2}$ найдём по формуле: $\sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{2} = \frac{1 - 0,4}{2} = 0,3$; $\sin \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{0,3}$.

По условию $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$. Разделив обе части неравенства на 2, получаем $\frac{3\pi}{4} < \frac{\alpha}{2} < \pi$, значит угол $\frac{\alpha}{2}$ во второй четверти, здесь синус положительный. $\sin \frac{\alpha}{2} = \sqrt{0,3}$.

2) $\cos \frac{\alpha}{2}$; найдём по формуле $\cos^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{\cos \alpha + 1}{2} = \frac{0,4 + 1}{2} = 0,75 =$
 $\cos \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{0,75} = \pm 0,5\sqrt{3}$

Мы уже выяснили, что угол $\frac{\alpha}{2}$ во второй четверти, косинус отрицательный. $\cos \frac{\alpha}{2} = -0,5\sqrt{3}$.

3) Так как тангенс это отношение синуса на косинус,

то $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2}} = \frac{\sqrt{0,3}}{-0,5\sqrt{3}} = -2\sqrt{0,1}$.

- Выведем формулу для тангенса половинного аргумента. Для этого разделим левую часть формулы (1) на левую часть формулы (2) и правую часть формулы (1) на правую часть формулы (2).

$$\frac{\sin^2 \frac{\alpha}{2}}{\cos^2 \frac{\alpha}{2}} = \frac{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}{\frac{\cos \alpha + 1}{2}} \quad \text{сократим на 2, и учитывая, что} \quad \frac{\sin^2 \frac{\alpha}{2}}{\cos^2 \frac{\alpha}{2}} = \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2},$$

получим:

$\operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{\cos \alpha + 1}$ **формула тангенса половинного аргумента (3).**

Так как котангенс это число, взаимнообратное тангенсу,

то $\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}} = \frac{1 + \cos \alpha}{1 - \cos \alpha}$

Пример. Найти $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$ и $\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}$, если известно, что $\cos \alpha = -0,6$ и $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

По формуле (3) находим $\operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{\cos \alpha + 1} = \frac{1 + 0,6}{-0,6 + 1} = \frac{1,6}{0,4} = 4$,
а $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \pm 2$. Найдём положение угла $\frac{\alpha}{2}$.

По условию $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, (разделим на 2)

$\frac{\pi}{4} < \frac{\alpha}{2} < \frac{\pi}{2}$, угол $\frac{\alpha}{2}$ в первой четверти, тангенс положительный, $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = 2$
, а $\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}} = 0,5$.

- Выведем формулу, по которой можно найти $\sin \alpha$ через $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$.

Для этого используем формулу синуса двойного угла $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$, заменив в ней x на $\frac{\alpha}{2}$.

Получаем $\sin \alpha = \sin(2 \cdot \frac{\alpha}{2}) = 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} = \frac{2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}}{1}$, учтём,
что $1 = \sin^2 \frac{\alpha}{2} + \cos^2 \frac{\alpha}{2}$, то

$\sin \alpha = \frac{2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}}{\sin^2 \frac{\alpha}{2} + \cos^2 \frac{\alpha}{2}}$, разделим числитель и знаменатель на $\cos^2 \frac{\alpha}{2}$,
получаем:

$$\sin \alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}} \quad (4)$$

- Выведем формулу для $\cos \alpha$ через $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$. Применим формулу косинуса двойного угла,

где $\alpha = 2(\frac{\alpha}{2})$, $\cos \alpha = \cos^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{\cos^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2}}{1} = \frac{\cos^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2}}{\sin^2 \frac{\alpha}{2} + \cos^2 \frac{\alpha}{2}}$,

разделим числитель и знаменатель на $\cos^2 \frac{\alpha}{2}$, получаем:

$$\cos \alpha = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}} \quad (5)$$

Пример. Найти $\cos \alpha$, если $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = 2$.

По формуле (5) $\cos \alpha = \frac{1 - 2^2}{1 + 2^2} = \frac{1 - 4}{1 + 4} = -0,6$.

- Если в формуле тангенса двойного

угла $\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}$ представить $\alpha = 2\left(\frac{\alpha}{2}\right)$, то получим ещё одну формулу, по которой тангенс угла α можно найти через тангенс

угла $\frac{\alpha}{2}$: $\operatorname{tg} \alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}$

С помощью доказанных на этом уроке формул можно не только вычислять значения выражений, но и упрощать выражения, доказывать тождества и решать тригонометрических уравнений.

Пример. Доказать тождество $\frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha} = \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$.

Представим $\cos \alpha = \cos^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2}$, а $\sin \alpha = 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}$, преобразуем левую часть тождества

$$\frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{1 - \left(\cos^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2}\right)}{2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}} = \frac{1 - \cos^2 \frac{\alpha}{2} + \sin^2 \frac{\alpha}{2}}{2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}}, \text{ но } 1 - \cos^2 \frac{\alpha}{2} = \sin^2 \frac{\alpha}{2}, \text{ то}$$

$$\frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{\sin^2 \frac{\alpha}{2} + \sin^2 \frac{\alpha}{2}}{2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}} = \frac{2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}}{2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}} = \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}.$$

Левая часть равна правой части, тождество доказано.

Проверочная работа:

№1.

а) Известно, что $\cos \alpha = 0,9$, $\pi < \alpha < 2\pi$,

Вычислите и установите соответствие между множествами А и В:

A

B

a) $\sin \frac{\alpha}{2};$

1) $\sqrt{0,5}$

б) $\cos \frac{\alpha}{2};$

2) $-\sqrt{0,95}$

в) $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2};$

3) $-\sqrt{\frac{10}{19}}$

г) $\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2};$

4) $-\sqrt{0,5}$

5) $2\sqrt{0,5}$

Подсказка: используйте формулы половинного аргумента и определение тангенса и котангенса.

б) Известно, что $\cos \alpha = -0,7$, $0 < \alpha < \pi$,

Вычислите и установите соответствие между множествами A и B:

A

B

a) $\sin \frac{\alpha}{2};$

1) $\sqrt{0,85}$

б) $\cos \frac{\alpha}{2};$

2) $\sqrt{0,15}$

в) $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2};$

3) $\sqrt{\frac{17}{3}}$

г) $\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2};$

4) $\sqrt{\frac{3}{17}}$

5) $\sqrt{0,75}$

Подсказка: используйте формулы половинного аргумента и определение тангенса и котангенса.

№2. Вычислите: а) $\frac{10 \operatorname{tg} 22,5^\circ}{1 - \operatorname{tg}^2 22,5^\circ}$; б) $\frac{12 \operatorname{tg} \frac{\pi}{8}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{8}}$

Ответ: а) 5; б) 6

Подсказка: используйте формулу тангенса двойного угла, где $\alpha = 2 \cdot \frac{\alpha}{2}$.

№3.

а) Упростите выражение: $\frac{2}{\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} + \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}}$

Выберите верный ответ: 1) $\sin \alpha$; 2) $\cos \alpha$; 3) $-\sin \alpha$.

Ответ: 1) $\sin \alpha$

б) Упростите выражение: $\frac{2}{\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} - \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}}$

Выберите верный ответ: 1) $-\operatorname{tg} \alpha$; 2) $-\cos \alpha$; 3) $\sin \alpha$.

Ответ: 1) $-\operatorname{tg} \alpha$

Подсказка: используйте определение тангенса и котангенса, основное тригонометрическое тождество, формулу синуса и косинуса двойного угла, где $\alpha = 2 \cdot \frac{\alpha}{2}$.