

## Конспект « Событие, вероятность события, сложение и умножение вероятностей. Понятие о независимости событий»

### Теоретический материал

В толковом словаре С.И. Ожегова и Н.Ю. Шведовой читаем: «Вероятность – возможность исполнения, осуществимости чего-нибудь». Мы часто употребляем в повседневной жизни «вероятно», «вероятнее», «невероятно», вовсе не имея в виду конкретные количественные оценки этой возможности исполнения. Основатель современной теории вероятностей А.Н. Колмогоров писал о вероятности так: «Вероятность математическая – это числовая характеристика степени возможности появления какого-либо определенного события в тех или иных определенных, могущих повторяться неограниченное число раз условиях».

Итак, в математике вероятность измеряется числом. Совсем скоро мы выясним, как именно это можно сделать. Но начнем мы с обсуждения того, у каких событий бывает «математическая вероятность» и что представляют собой эти «определенные, могущие повторяться неограниченное число раз условия». Именно поэтому рассмотрим случайные события и случайные эксперименты.

Нужно сказать, что теория вероятностей, как никакая другая область математики, полна противоречий и парадоксов. Объяснение этому очень простое – она слишком тесно связана с реальной, окружающей нас действительностью. Долгое время ее вместе с математической статистикой даже не хотели причислять к математическим дисциплинам, считая их сугубо прикладными науками.

Только в первой половине прошлого века, в основном благодаря трудам нашего великого соотечественника А.Н. Колмогорова, имя которого уже упоминалось выше, были построены математические основания теории вероятностей, которые позволили отделить собственно науку от ее приложений. Подход, предложенный Колмогоровым, теперь принято называть аксиоматическим, поскольку вероятность в нем (а точнее, вероятностное пространство) определяется как некая математическая структура, удовлетворяющая определенной системе аксиом.

Именно на этом подходе построен современный вузовский курс теории вероятностей, через который прошли в свое время все нынешние учителя математики. Однако в школе такой подход к изучению вероятности (да и математики в целом) вряд ли разумен. Если в вузе основной акцент делается на изучении математического аппарата для исследования вероятностных моделей, то в школе *ученик должен научиться эти модели строить*, анализировать, проверять их адекватность реальным ситуациям. Такую точку зрения разделяют сегодня большинство ученых, занимающихся проблемами школьного математического образования

В современных школьных учебниках можно найти следующее определение: событие называется **случайным**, если при одних и тех же условиях оно может как произойти, так и не произойти. Случайным будет, например, событие «При подбрасывании игрального кубика выпадет 6 очков».

В приведенном определении неявно подразумевается одно важное требование, которое необходимо подчеркнуть: мы должны иметь возможность *неоднократно воспроизводить одни и те же условия, в которых наблюдается данное событие* (например, подбрасывать кубик),- иначе невозможно судить о его случайности.

Стало быть, говоря о любом случайном событии, мы всегда имеем в виду наличие определенных условий, без которых об этом событии вообще не имеет смысла говорить. Этот комплекс условий называют **случайным опытом** или **случайным экспериментом**.

В дальнейшем мы будем называть случайным любое событие, связанное со случайным экспериментом. До эксперимента, как правило, невозможно точно сказать, произойдет данное событие, или не произойдет – это выясняется лишь после его завершения. Но неспроста мы сделали оговорку «как правило»: в теории вероятностей

принято считать случайными все события, связанные со случайным экспериментом, в том числе:

- **невозможные**, которые никогда не могут произойти;
- **достоверные**, которые происходят при каждом таком эксперименте.

Например, событие «На игральном кубике выпадет 7 очков» - невозможное, а «На игральном кубике выпадет меньше семи очков» - достоверное. Разумеется, если речь идет о кубике, на гранях которого написаны числа от 1 до 6.

События называются **несовместными**, если каждый раз возможно появление только одного из них. События называются **совместными**, если в данных условиях появление одного из этих событий не исключает появления другого при том же испытании (В урне два шара – белый и черный, появление черного шара не исключает появления белого при том же испытании). События называются **противоположными**, если в условиях испытания они, являясь единственными его исходами, несовместны. Вероятность события рассматривается как мера объективной возможности появления случайного события.

#### **Обозначения:**

Случайные события (большими буквами латинского алфавита): A, B, C, D, ... (или  $A_1, A_m$ ). «Случайные» опускают и говорят просто «события».

Число исходов, благоприятствующих наступлению данного события – m;

Число всех исходов (опытов) – n.

#### **Классическое определение вероятности.**

**Вероятностью** события A называется отношение числа исходов m, благоприятствующих наступлению данного события  $A_1$  к числу n всех исходов (несовместных, единственно возможных и равновероятных), т.е.

$$P(A) = \frac{m}{n} \text{ – вероятность случайного события}$$

Вероятность любого события не может быть меньше нуля и больше единицы, т.е.  $0 \leq P(A) \leq 1$

Невозможному событию соответствует вероятность  $P(A)=0$ , а достоверному – вероятность  $P(A)=1$

#### **Теоремы сложения вероятностей.**

##### **Теорема сложения вероятностей несовместных событий.**

Вероятность появления одного из нескольких попарно несовместных событий, безразлично какого, равна сумме вероятностей этих событий:

$$P(A+B)=P(A)+P(B);$$

$$P(A_1 + A_2 + \dots + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n).$$

##### **Теорема сложения вероятностей совместных событий.**

Вероятность появления хотя бы одного из двух совместных событий равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их совместного появления:

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)$$

Для трех совместных событий имеет место формула:

$$P(A+B+C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)$$

Событие, противоположное событию A (т.е. ненаступление события A), обозначают  $\bar{A}$ . Сумма вероятностей двух противоположных событий равна единице:  $P(A)+P(\bar{A})=1$

Вероятность наступления события A, вычисленная в предположении, что событие B уже произошло, называется **условной вероятностью** события A при условии B и обозначается  $P_B(A)$  или  $P(A/B)$ .

Если A и B – независимые события, то

$$P(B) \cdot P_A(B) = P_{\bar{A}}(B).$$

События A,B,C,... называются **независимыми в совокупности**, если вероятность каждого из них не меняется в связи с наступлением или ненаступлением других событий по отдельности или в любой их комбинации.

#### **Теоремы умножения вероятностей.**

##### **Теорема умножения вероятностей независимых событий.**

Вероятность совместного появления двух независимых событий равна произведению вероятностей этих событий:

$$P(AB)=P(A) \cdot P(B)$$

Вероятность появления нескольких событий, независимых в совокупности, вычисляется по формуле:

$$P(A_1 A_2 \dots A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \dots P(A_n).$$

##### **Теорема умножения вероятностей зависимых событий.**

Вероятность совместного появления двух зависимых событий равна произведению одного из них на условную вероятность второго:

$$P(AB)=P(A) \cdot P_A(B)=P(B) \cdot P_B(A)$$

#### **Практическая часть**

##### **Задача 1.**

В лотерее из 1000 билетов имеются 200 выигрышных. Вынимают наугад один билет. Чему равна вероятность того, что этот билет выигрышный?

**Решение:** Событие A-билет выигрышный. Общее число различных исходов есть  $n=1000$

Число исходов, благоприятствующих получению выигрыша, составляет  $m=200$ .

Согласно формуле  $P(A)=\frac{m}{n}$ , получим  $P(A)=\frac{200}{1000}=\frac{1}{5}=0,2$

##### **Задача 2.**

Из урны, в которой находятся 5 белых и 3 черных шара, вынимают один шар. Найти вероятность того, что шар окажется черным.

**Решение:** Событие A-появление черного шара. Общее число случаев  $n=5+3=8$

Число случаев  $m$ , благоприятствующих появлению события A, равно 3

$$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{3}{8}=0,375$$

##### **Задача 3.**

Из урны, в которой находятся 12 белых и 8 черных шаров, вынимают наудачу два шара. Какова вероятность того, что оба шара окажутся черными?

**Решение:** Событие A- появление двух черных шаров. Общее число возможных случаев  $n$  равно числу сочетаний из 20 элементов  $(12+8)$  по 2

$$n=C_{20}^2=\frac{20 \cdot 19}{1 \cdot 2}=190$$

Число случаев  $m$ , благоприятствующих событию A, составляет

$$m=C_8^2=\frac{8 \cdot 7}{1 \cdot 2}=28$$

$$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{28}{190}=\frac{14}{95}=0,147$$

##### **Задача 4.**

В ящике в случайном порядке разложены 20 деталей, причем 5 из них стандартные. Рабочий берет наудачу 3 детали. Найти вероятность того, что по крайней мере одна из взятых деталей окажется стандартной.

##### **Задача 5.**

Найти вероятность того, что наудачу взятое двухзначное число окажется кратным либо 3, либо 5, либо тому и другому одновременно

##### **Задача 6.**

В одной урне находятся 4 белых и 8 черных шаров, в другой – 3 белых и 9 черных. Из каждой урны вынули по шару. Найти вероятность того, что оба шара окажутся белыми.

**Решение:** Пусть А - появление белого шара из первой урны, а В – появление белого шара из второй урны. Очевидно, что события А и В независимы. Найдем  $P(A)=4/12=1/3$ ,  $P(B)=3/12=1/4$ , получим

$$P(AB)=P(A) \cdot P(B)=(1/3) \cdot (1/4)=1/12=0,083$$

**Задача 7.**

В ящике находится 12 деталей, из которых 8 стандартных. Рабочий берет наудачу одну за другой две детали. Найти вероятность того, что обе детали окажутся стандартными.

**Решение:** Введем следующие обозначения: А – первая взятая деталь стандартная; В – вторая взятая деталь стандартная. Вероятность того, что первая деталь стандартная, составляет  $P(A)=8/12=2/3$ . Вероятность того, что вторая взятая деталь окажется стандартной при условии, что была стандартной первая деталь, т.е. условная вероятность события В, равна  $P_A(B)=7/11$ .

Вероятность того, что обе детали окажутся стандартными, находим по теореме умножения вероятностей зависимых событий:

$$P(AB)=P(A) \cdot P_A(B)=(2/3) \cdot (7/11)=14/33=0,424$$

**Самостоятельная работа**

1. Какова вероятность того, что наудачу выбранное целое число от 40 до 70 является кратным 6?

2. Какова вероятность того, что при пяти бросаниях монеты она три раза упадет гербом кверху?

**Домашнее задание: (решить задачи)**

1. Какова вероятность того, что наудачу выбранное целое число от 1 до 30 (включительно) является делителем числа 30?

2. В НИИ работает 120 человек, из них 70 знают английский язык, 60 – немецкий, а 50 – знают оба. Какова вероятность того, что выбранный наудачу сотрудник не знает ни одного иностранного языка?