

## Конспект «Уравнение $\sin x = a$ »

### Перечень вопросов, рассматриваемых в теме:

- 1) Понятие арксинус числа;
- 2) Тождества, связанные с арксинусом;
- 3) Решение тригонометрических уравнений;

### Глоссарий по теме

Арксинусом числа  $m$  ( $|m| \leq 1$ ) называется такое число  $\alpha$ , что:  $\sin \alpha = m$  и  $-\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$ .

Арксинус числа  $m$  обозначают:  $\arcsin m$ .

Заметим, что такой промежуток для  $\alpha$  берется потому, что синус на отрезке  $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$  принимает все свои значения ровно по одному разу.

Из определения следует, что для  $|m| \leq 1$   $\sin(\arcsin m) = m$

С другой стороны, если  $\sin \alpha = m$  и  $-\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$ , то  $\arcsin(\sin \alpha) = \alpha$ .

Таким образом, получаем два простейших тождества для арксинуса.

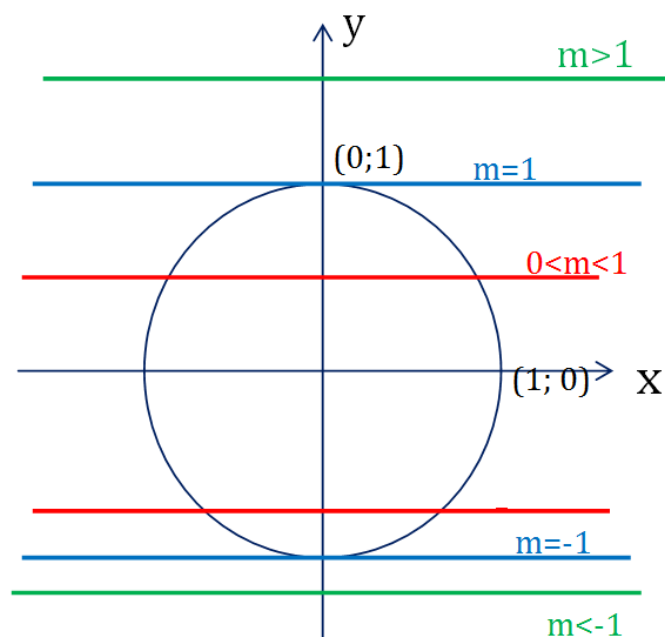
1.  $\sin(\arcsin m) = m$  для любого  $m$ :  $|m| \leq 1$
2.  $\arcsin(\sin \alpha) = \alpha$  для любого  $\alpha$ :  $-\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$ .

### Открытые электронные ресурсы:

Решу ЕГЭ образовательный портал для подготовки к экзаменам <https://ege.sdamgia.ru/>

### Теоретический материал для самостоятельного изучения

1. Так как  $\sin \alpha$  является абсциссой точки  $M(\alpha)$  координатной окружности, то для решения уравнения  $\sin \alpha = m$  нужно сначала найти на этой окружности точки, имеющие абсциссу  $m$ , то есть точки пересечения окружности с прямой  $x=m$ . Если  $|m| > 1$ , то таких точек нет, если  $|m| = 1$ , то такая точка одна, если  $|m| < 1$ , то таких точек две.



После отыскания этих точек нужно найти все такие числа  $\alpha$ , которые соответствуют этим точкам. Множество таких чисел и будет решением уравнения  $\sin \alpha = m$ .

## Примеры и разбор решения заданий тренировочного модуля

*Рассмотрим пример на вычисление арксинуса.*

### Пример.

Вычислить  $\arcsin \frac{\sqrt{3}}{2}$ .

Решение:

Так как  $\sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$  и  $-\frac{\pi}{2} \leq \frac{\pi}{6} \leq \frac{\pi}{2}$ , то  $\arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{3}$ .

Ответ:  $\frac{\pi}{3}$ .

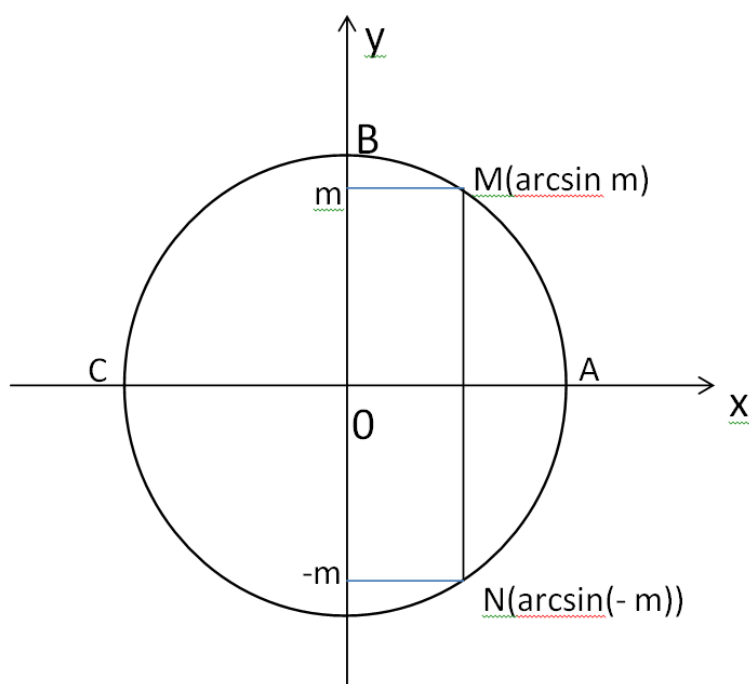
### Задание.

Вычислить  $\arcsin(-\frac{\sqrt{2}}{2})$ .

Ответ:  $-\frac{\pi}{4}$ .

На рисунке показано, как связаны друг с другом числа  $m$  и  $\arcsin m$ .

Из рисунка видно, что  $\arcsin(-m) = -\arcsin m$ .



Запишем теперь с помощью арксинуса решение уравнения  $\sin \alpha = m$ .

Одним из решений уравнения является число  $\alpha = \arcsin m$ . Так как  $\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha$ , то число  $\pi - \arcsin m$  также является решением данного уравнения.

Точка  $M(\arcsin m)$  соответствует всем числам вида  $\arcsin m + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$ .

Точка  $A(\pi - \arcsin m)$  соответствует всем числам вида  $\pi - \arcsin m + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$ .

Таким образом, решением уравнения  $\sin \alpha = m$  являются все числа вида

$$\alpha = \left[ \begin{array}{l} \arcsin m + 2\pi k \\ \pi - \arcsin m + 2\pi k \end{array}, k \in \mathbb{Z} \right] (*)$$

**Пример.**

Решим уравнение  $\sin \alpha = -0,6$

Решение:

Так как  $\arcsin(-0,6) = -\arcsin 0,6$ , то по формуле (\*) получаем:

$$\alpha = \left[ \begin{array}{l} -\arcsin 0,6 + 2\pi k \\ \pi + \arcsin 0,6 + 2\pi k \end{array}, k \in \mathbb{Z} \right].$$

## Задание

Решите уравнение  $\sin \alpha = 0,75$

Ответ:  $\alpha = \left[ \arcsin 0,75 + 2\pi k, \pi - \arcsin 0,75 + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \right]$ .

*Рассмотрим решение более сложных уравнений с синусом.*

1. Рассмотрим решение уравнения  $\sin \left( 2x - \frac{3\pi}{4} \right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ .

Решение:

$$\arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{3}, \text{ поэтому } 2x - \frac{3\pi}{4} = \begin{cases} \frac{\pi}{3} + 2\pi k \\ \frac{2\pi}{3} + 2\pi k \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$

Отсюда  $2x = \begin{cases} \frac{3\pi}{4} + \frac{\pi}{3} + 2\pi k \\ \frac{3\pi}{4} + \frac{2\pi}{3} + 2\pi k \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$  , или  $2x = \begin{cases} \frac{13\pi}{12} + 2\pi k \\ \frac{17\pi}{12} + 2\pi k \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$

Тогда  $x = \begin{cases} \frac{13\pi}{24} + \pi k \\ \frac{17\pi}{24} + \pi k \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$

Ответ:  $x = \begin{cases} \frac{13\pi}{24} + \pi k \\ \frac{17\pi}{24} + \pi k \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$ .

1. Рассмотрим решение уравнения  $\sin \left( x^2 - 4x + \frac{\pi}{3} \right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

Решение:

$$\arcsin \left( -\frac{\sqrt{3}}{2} \right) = -\frac{\pi}{3}, \text{ поэтому } x^2 - 4x + \frac{\pi}{3} = \begin{cases} -\frac{\pi}{3} + 2\pi k \\ -\frac{2\pi}{3} + 2\pi k \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$

Отсюда получаем:

$$\begin{cases} x^2 - 4x - \frac{2\pi}{3} - 2\pi k = 0, k \in \mathbb{Z} \\ x^2 - 4x - \pi - 2\pi k = 0 \end{cases}$$

Мы получили два квадратных уравнения с параметром  $k$ .

Запишем их решения.

$$\begin{cases} x = 2 \pm \sqrt{4 + \frac{2\pi}{3} + 2\pi k}, k \in \mathbb{Z} \\ x = 2 \pm \sqrt{4 + \pi + 2\pi k} \end{cases}$$

Для того чтобы число  $x$  было действительным, дискриминант должен быть неотрицательным. То есть:

$$4 + \frac{2\pi}{3} + 2\pi k \geq 0 \quad (1) \text{ и } 4 + \pi + 2\pi k \geq 0 \quad (2)$$

Неравенство (1) выполняется при  $k \geq -\frac{1}{3} - \frac{2}{\pi}$ , так как  $k$  – целое, то  $k \geq 0$ .

Неравенство (2) выполняется при  $k \geq -\frac{1}{2} - \frac{2}{\pi}$ , так как  $k$  – целое, то  $k \geq -1$ .

Таким образом, получаем, что при целых значениях  $k \geq 0$  исходное

уравнение имеет две серии решений: 
$$\begin{cases} x = 2 \pm \sqrt{4 + \frac{2\pi}{3} + 2\pi k}, k \in \mathbb{Z} \\ x = 2 \pm \sqrt{4 + \pi + 2\pi k} \end{cases}$$

При  $k = -1$  уравнение имеет два решения:  $x = 2 \pm \sqrt{4 - \pi}$

Ответ: а) 
$$\begin{cases} x = 2 \pm \sqrt{4 + \frac{2\pi}{3} + 2\pi k}, k \in \mathbb{Z} \\ x = 2 \pm \sqrt{4 + \pi + 2\pi k} \end{cases} \quad \text{при } k \geq 0,$$

б)  $x = 2 \pm \sqrt{4 - \pi}$  при  $k = -1$ ,

в) нет решений при  $k < -1$ .

1. Рассмотрим решение уравнения  $\sin x^2 = \sin(2x - 3)$

Решение:

Так как синусы равны, то их аргументы связаны соотношением:

$$x^2 = \begin{cases} 2x - 3 + 2\pi k \\ \pi - 2x + 3 + 2\pi k \end{cases}, k \in Z$$

Отсюда:

$$\begin{cases} x^2 - 2x + 3 - 2\pi k \\ x^2 + 2x - 3 - \pi - 2\pi k \end{cases}, k \in Z$$

$$\begin{cases} x = 1 \pm \sqrt{-2 + 2\pi k} \\ x = -1 \pm \sqrt{4 + \pi + 2\pi k} \end{cases}, k \in Z$$

Первое уравнение имеет решение при  $k \geq \frac{1}{\pi}$  или при  $k \geq 1$ .

Второе уравнение имеет решение при  $k \geq -\frac{2}{\pi} - \frac{1}{2}$  или при  $k \geq -1$ .

Таким образом:

Ответ:

$$a) \begin{cases} x = 1 \pm \sqrt{-2 + 2\pi k} \\ x = -1 \pm \sqrt{4 + \pi + 2\pi k} \end{cases}, k \in Z \text{ при } k \geq 1,$$

$$б) x = x = -1 \pm \sqrt{4 + \pi + 2\pi k}, k \in Z \text{ при } k = -1, \text{ при } k = 0,$$

$$в) \text{ нет решений при } k < -1.$$

1. Рассмотрим решение уравнения  $(1 - 2\sin x)(4\sin x + 1) = 0$

Решение:

Уравнение равносильно совокупности уравнений:

$$\begin{cases} 1 - 2\sin x = 0 \\ 4\sin x + 1 = 0 \end{cases} \text{ или: } \begin{cases} \sin x = 0,5 \\ \sin x = -0,25 \end{cases}$$

$$x = \begin{cases} \frac{\pi}{6} + 2\pi k \\ \frac{5\pi}{6} + 2\pi k \end{cases}, k \in Z$$

Решение первого уравнения:

$$\text{Решение второго уравнения: } x = \begin{cases} -\arcsin(0,25) + 2\pi n \\ \pi + \arcsin(0,25) + 2\pi n \end{cases}, n \in Z$$

$$x = \begin{cases} \frac{\pi}{6} + 2\pi k \\ \frac{5\pi}{6} + 2\pi k \\ -\arcsin(0,25) + 2\pi n \\ \pi + \arcsin(0,25) + 2\pi n \end{cases}, n, k \in \mathbb{Z}$$

Ответ:

1. Рассмотрим решение уравнения  $9\sin^2 x - 2 = 0$

Решение:

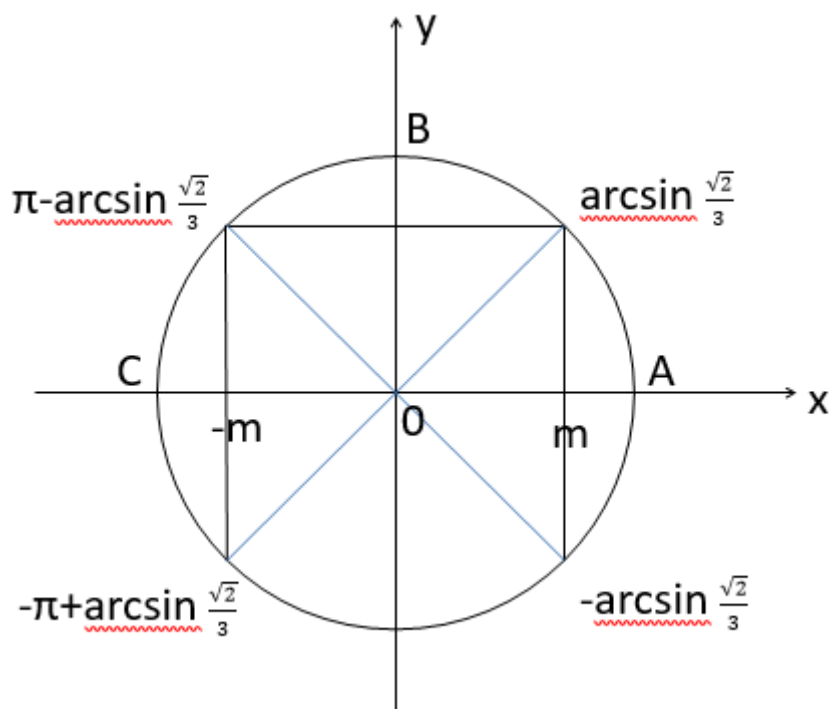
Выразим синус:

$$\sin x = \pm \frac{\sqrt{2}}{3}$$

Имеем две серии решений:

$$x = \begin{cases} \pm(\pi - \arcsin(\frac{\sqrt{2}}{3})) + 2\pi n, & n \in \mathbb{Z} \\ \pm \arcsin(\frac{\sqrt{2}}{3}) + 2\pi n, & n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Изобразим эти множества на тригонометрической окружности:



Можно записать эти две серии в виде одного равенства:

$$x = \pm \arcsin\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right) + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Ответ:  $x = \pm \arcsin\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right) + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$

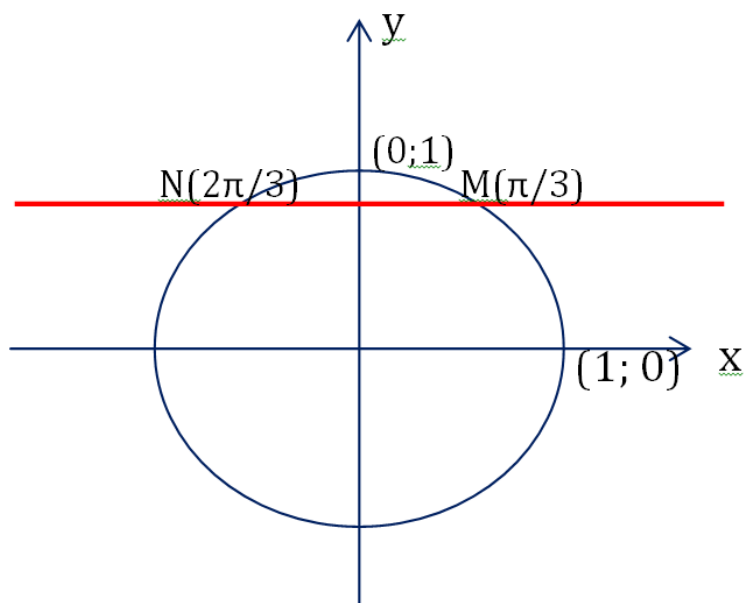
Заметим, что для краткости решение тригонометрического уравнения  $\sin x = m$  можно записать в виде:  $x = (-1)^n \arcsin m + \pi k, k \in \mathbb{Z}$

### Пример 1.

Рассмотрим решение уравнения  $\sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$ .

Прямая  $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$  пересекает тригонометрическую окружность в двух точках:

$M(\pi/3)$  и  $N(2\pi/3)$ .



Точка  $M(\pi/3)$  соответствует всем числа вида  $\frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$ .

Точка  $N(2\pi/3)$  соответствует всем числа вида  $\frac{2\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$ .

Таким образом, решение уравнения  $\sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$  можно записать так:



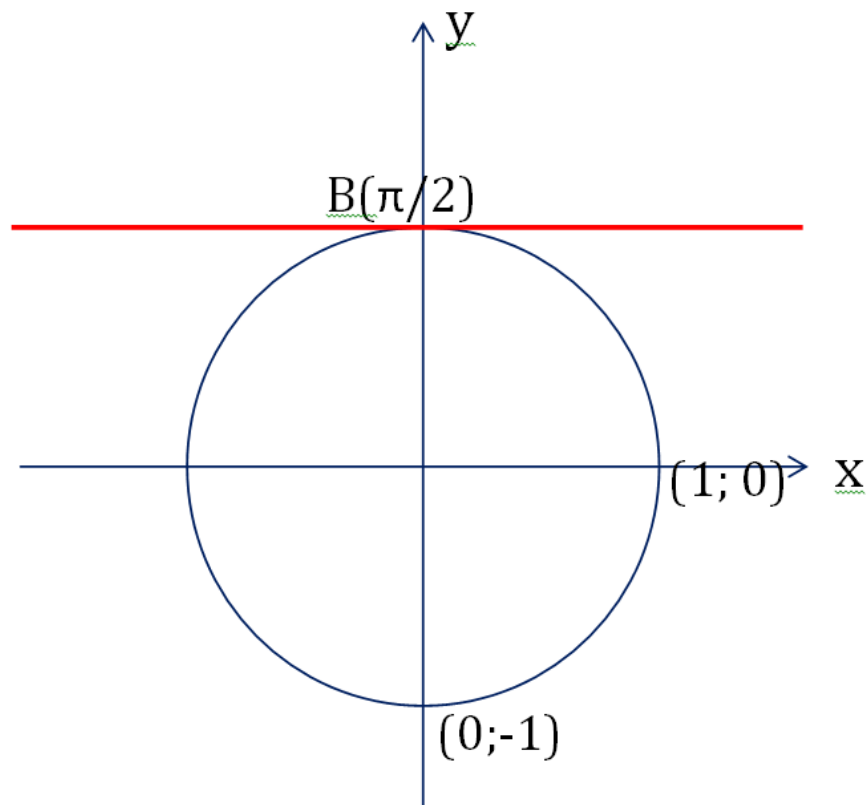
$$\alpha = \begin{cases} \frac{\pi}{3} + 2\pi k \\ \frac{2\pi}{3} + 2\pi k \end{cases}, k \in Z$$

Ответ:  $\alpha = \begin{cases} \frac{\pi}{3} + 2\pi k \\ \frac{2\pi}{3} + 2\pi k \end{cases}, k \in Z$

### Пример 2.

Рассмотрим решение уравнения  $\sin \alpha = 1$ .

Прямая  $y=1$  имеет с тригонометрической окружностью одну общую точку:  $B(\frac{\pi}{2})$ .



Этой точке соответствуют все числа вида  $\frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in Z$ . Поэтому решение уравнения  $\sin \alpha = 1$  имеет вид  $\alpha = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in Z$ .

Ответ:  $\alpha = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in Z$ .

### Пример 3.

Рассмотрим решение уравнения  $\sin \alpha = 0$ .

Прямая  $y=0$  имеет с тригонометрической окружностью две общие точки:  $C(0)$  и  $K(\pi)$ .

Поэтому решение уравнения  $\sin \alpha = 0$  можно записать так:  $\alpha = \pi k, k \in Z$ .

Ответ:  $\alpha = \pi k, k \in Z$ .

### Задание.

Решите уравнение  $\sin \alpha = -\frac{1}{2}$ .

Ответ:  $\alpha = \begin{cases} -\frac{\pi}{6} + 2\pi k \\ -\frac{5\pi}{6} + 2\pi k \end{cases}, k \in Z$ .

2. Мы можем записать решение уравнение  $\sin \alpha = m$  для любых табличных значений  $m$ . В тех случаях, когда мы не знаем значения аргумента, соответствующее значению  $m$ , чтобы уметь решать уравнение  $\sin \alpha = m$  для произвольных значений  $m$ , введем понятие арксинуса.