

Повторяем геометрию 7 класса летом

**Будущему 8 – класснику
материал для повторения перед новым
учебным годом**

**Составитель учитель математики
Зиновьева Л.А.**

ОБРАЗЕЦ для разбора

Точка A принадлежит отрезку BC , длина которого равна 24 см. Найти длины отрезков AB и AC , если $AB : AC = 3 : 5$.

Решение.

① $BC = AB + AC$ (аксиома III).

② Пусть x см — величина одной части.

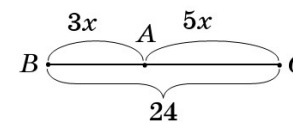
③ Тогда $AB = 3x$ см, $AC = 5x$ см.

④ $3x + 5x = 24$.

⑤ $8x = 24$; $x = 24 : 8$; $x = 3$.

⑥ Итак, $AB = 3 \cdot 3 = 9$ (см); $AC = 5 \cdot 3 = 15$ (см).

⑦ *Ответ:* 9 см; 15 см.



ВЫПОЛНИ САМОСТОЯТЕЛЬНО

На отрезке AB отметили точку D так, что $AD : DB = 7 : 11$.
Найти длины отрезков AD и DB , если $AB = 54$ см.

Точка M делит отрезок AK в отношении $11 : 15$. Найти
длины отрезков AM и KM , если $AK = 130$ мм.

Виды углов			
Острый	Тупой	Прямой	Развернутый
$0^\circ < \angle A < 90^\circ$	$90^\circ < \angle B < 180^\circ$	$\angle C = 90^\circ$	$\angle O = 180^\circ$

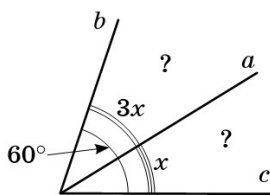
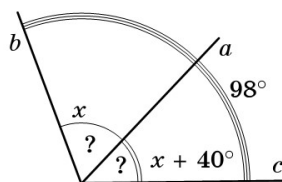
ПРИМЕР

Луч a проходит между сторонами угла (bc) . Найти величины углов (ab) и (ac) , если:

- 1) $\angle(ab)$ на 40° меньше $\angle(ac)$, $\angle(bc) = 98^\circ$;
- 2) $\angle(ab)$ в 3 раза больше $\angle(ac)$, $\angle(bc) = 60^\circ$.

Решение. Условие 1

- ① $\angle(bc) = \angle(ab) + \angle(ac)$
(аксиома V).
- ② Пусть $\angle(ab) = x^\circ$.
- ③ Тогда $\angle(ac) = (x + 40)^\circ$.
- ④ $x + x + 40 = 98$.
- ⑤ $2x = 98 - 40$; $2x = 58$; $x = 58 : 2$; $x = 29$.
- ⑥ Итак, $\angle(ab) = 29^\circ$, $\angle(ac) = 29^\circ + 40^\circ = 69^\circ$.
- ⑦ **Ответ:** 29° ; 69° .



Условие 2

- ① $\angle(bc) = \angle(ab) + \angle(ac)$.
 - ② Пусть $\angle(ac) = x^\circ$.
 - ③ Тогда $\angle(ab) = 3x^\circ$.
 - ④ $3x + x = 60$.
- $$4x = 60$$
- $$x = 60 : 4$$
- $$x = 15$$

Итак, $\angle(ac) = 15^\circ$, $\angle(ab) = 3 \cdot 15^\circ = 45^\circ$.

Ответ: 45° ; 15° .

ВЫПОЛНИ САМОСТОЯТЕЛЬНО

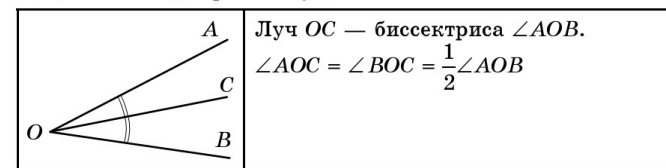
1. Луч OB проходит между сторонами $\angle AOC$, равного 85° . Найти $\angle AOB$ и $\angle BOC$, если $\angle AOB$ больше $\angle BOC$ на 21° .
2. Луч, проходящий между сторонами угла, равного 112° , делит его на две части, одна из которых в 6 раз меньше другой. Найти образовавшиеся углы.

Решения задач

1.

2.

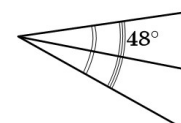
Биссектриса угла — луч, выходящий из вершины угла и делящий его на два равных угла.



Найти угол, образованный биссектрисой угла, равного 48° , и стороной данного угла.

Решение.

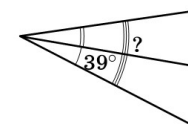
- ① $48^\circ : 2 = 24^\circ$.
- ② **Ответ:** 24° .



Найти величину угла, если угол между его биссектрисой и стороной равен 39° .

Решение.

- ① $39^\circ \cdot 2 = 78^\circ$.
- ② **Ответ:** 78° .



Найти величину угла, если угол, образованный его биссектрисой и стороной, равен 82° .

Найти угол между стороной и биссектрисой прямого угла.

Два угла называются **смежными**, если у них одна сторона общая, а другие стороны этих углов — дополнительные полупрямые.

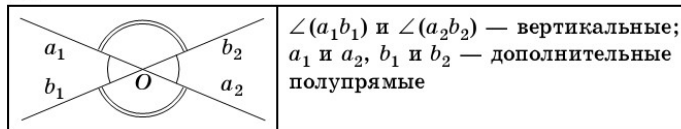


$\angle AOC$ и $\angle BOC$ — смежные

Свойство смежных углов

Сумма смежных углов равна 180° :
 $\angle AOC + \angle BOC = 180^\circ$.

Два угла называются **вертикальными**, если стороны одного угла являются дополнительными полупрямыми сторон другого.



$\angle(a_1b_1)$ и $\angle(a_2b_2)$ — вертикальные;
 a_1 и a_2 , b_1 и b_2 — дополнительные полупрямые

Свойство вертикальных углов

Вертикальные углы равны:
 $\angle(a_1b_1) = \angle(a_2b_2)$, $\angle(a_1b_2) = \angle(a_2b_1)$.

ПРИМЕР

Один из углов, образовавшихся при пересечении двух прямых, равен 57° . Найти остальные углы.

Решение.

- ① Пусть при пересечении данных двух прямых образовались углы $\angle 1, \angle 2, \angle 3, \angle 4$.

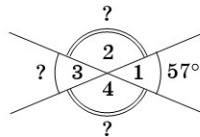
По условию $\angle 1 = 57^\circ$. $\angle 1 = \angle 3$, $\angle 2 = \angle 4$ как вертикальные.

- ② $\angle 1 + \angle 2 = 180^\circ$ как смежные.

- ③ $\angle 2 = 180^\circ - \angle 1 = 180^\circ - 57^\circ = 123^\circ$.

- ④ Итак, $\angle 2 = \angle 4 = 123^\circ$, $\angle 3 = \angle 1 = 57^\circ$.

- ⑤ **Ответ:** $123^\circ, 57^\circ, 123^\circ$.



ВЫПОЛНИ САМОСТОЯТЕЛЬНО

Найти углы, которые получаются при пересечении двух прямых, если один из них равен: 1) 106° ; 2) 32° ; 3) 117° .

ПРИМЕР

Сумма двух углов, образовавшихся при пересечении двух прямых, равна 110° . Найти образовавшиеся углы.

Решение.

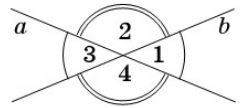
- ① $\angle 1 = \angle 3$, $\angle 2 = \angle 4$ как вертикальные. Пусть $\angle 1 + \angle 3 = 110^\circ$, тогда $\angle 1 = \angle 3 = 110^\circ : 2 = 55^\circ$.

- ② $\angle 2 + \angle 1 = 180^\circ$ как смежные.

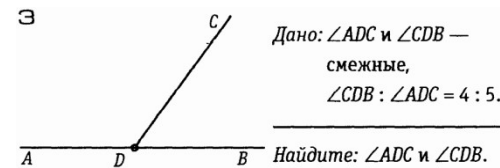
Отсюда $\angle 2 = 180^\circ - \angle 1 = 180^\circ - 55^\circ = 125^\circ$.

- ③ $\angle 4 = \angle 2 = 125^\circ$.

- ④ **Ответ:** $55^\circ, 125^\circ, 55^\circ, 125^\circ$.



Решение:



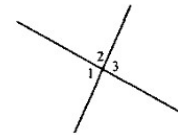
Дано: $\angle ADC$ и $\angle CDB$ — смежные,
 $\angle CDB : \angle ADC = 4 : 5$.

Найдите: $\angle ADC$ и $\angle CDB$.

Решение:

$$\angle 1 + \angle 3 = 204^\circ$$

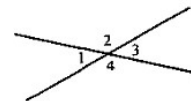
$$\angle 2 = ?$$



Ответ.

$$\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 230^\circ$$

$$\angle 4 = ?$$



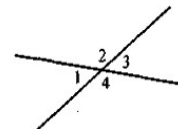
Ответ.

Решение:

Решение:

$$\angle 2 = \angle 1 + \angle 3$$

$$\angle 4 = ?$$



Ответ.

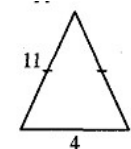
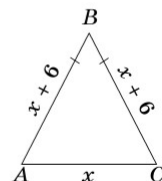
Виды треугольников по сторонам		
Разносторонний	Равнобедренный	Равносторонний (правильный)
$P = a + b + c$	$P = 2a + b$	$P = 3a$

ПРИМЕР

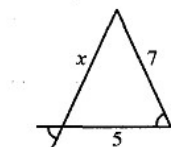
Найти стороны равнобедренного треугольника, если его периметр равен 33 см, а основание на 6 см меньше боковой стороны.

Решение.

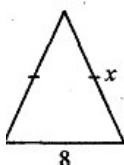
- ① $P_{\triangle ABC} = 33$ см.
- ② Пусть $AC = x$ см, тогда $AB = BC = (x + 6)$ см.
- ③ $P_{\triangle ABC} = 2 \cdot AB + AC$.
 $2 \cdot (x + 6) + x = 33$; $2x + 12 + x = 33$;
 $3x = 21$; $x = 7$.
- ④ Итак, $AC = 7$ см,
 $AB = BC = 7 + 6 = 13$ (см).
- ⑤ Ответ: 7 см; 13 см; 13 см.



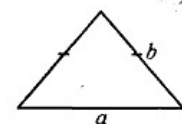
1. $P_{\triangle} = ?$



2. $x = ?$



4. $P_{\triangle} = 28$
 $x = ?$



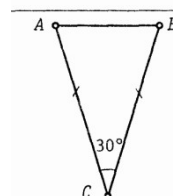
5. $a - b = 4$, $P_{\triangle} = 46$
 $a = ?$

Свойство равнобедренного треугольника	
Углы при основании равнобедренного треугольника равны. $\angle A = \angle C$	
	Медиана равнобедренного треугольника, проведенная к основанию, является биссектрисой и высотой этого треугольника.
Высота равнобедренного треугольника, проведенная к его основанию, является медианой и биссектрисой.	Биссектриса равнобедренного треугольника, проведенная к его основанию, является медианой и высотой.
Признак равнобедренного треугольника	
Если в треугольнике два угла равны, то он равнобедренный.	

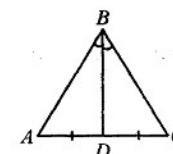
Если медиана треугольника совпадает с его высотой, то он равнобедренный.

Решение:

Найдите $\angle CBA$.

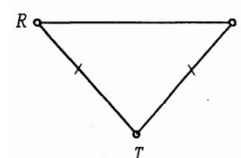


Решение:



8. $P_{\triangle ABC} = 32$, $AB - DC = 4$
 $BC = ?$

Ответ.



Дано: $\triangle RST$,
 $RT = ST$,
 $RT : RS = 4 : 7$,
 $P = 45$ дм.

Найдите: RT , TS , RS .

Ответ.

Решение:

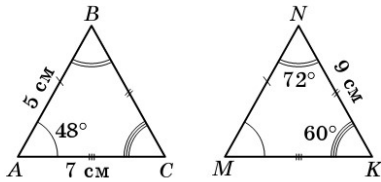
Треугольники называются **равными**, если у них соответствующие стороны и соответствующие углы равны.

	$\triangle ABC = \triangle KEM$ 1) $AB = KE$; $BC = EM$; $AC = KM$; 2) $\angle A = \angle K$; $\angle B = \angle E$; $\angle C = \angle M$
Помни!	
Обозначение равных треугольников записывают по соответствующим вершинам.	

ПРИМЕР

Известно, что $\triangle ABC = \triangle MNK$, $AB = 5$ см, $AC = 7$ см, $NK = 9$ см, $\angle A = 48^\circ$, $\angle N = 72^\circ$, $\angle K = 60^\circ$. Найти неизвестные стороны и углы данных треугольников.

Решение.



- ① Так как $\triangle ABC = \triangle MNK$, то $AB = MN$, $BC = NK$, $AC = MK$; $\angle A = \angle M$, $\angle B = \angle N$, $\angle C = \angle K$.
- ② Значит, $BC = 9$ см, $MN = 5$ см, $MK = 7$ см; $\angle M = 48^\circ$, $\angle B = 72^\circ$, $\angle C = 60^\circ$.
- ③ **Ответ:** $BC = 9$ см, $\angle B = 72^\circ$, $\angle C = 60^\circ$, $MN = 5$ см, $MK = 7$ см, $\angle M = 48^\circ$.

ВЫПОЛНИ САМОСТОЯТЕЛЬНО

В треугольнике EFB $EB = 12$ см, $\angle E = 83^\circ$. Найти длину стороны MP и $\angle M$ равного ему треугольника MOP .

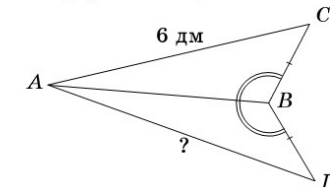
Известно, что $\triangle ACD = \triangle BER$, $BE = 6$ м, $ER = 8$ м, $BR = 9$ м, $\angle E = 29^\circ$, $\angle R = 93^\circ$, $\angle B = 58^\circ$. Найти $\angle C$.

<p>Теорема (первый признак равенства треугольников — по двум сторонам и углу между ними)</p>	<p>Если две стороны и угол между ними одного треугольника соответственно равны двум сторонам и углу между ними другого треугольника, то такие треугольники равны.</p>
<p>Замечание. Если в формулировке теоремы убрать слова «между ними», то вывод теоремы может быть неверным. Например: $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$, но $\triangle ABC \neq \triangle A_1B_1C_2$.</p>	
<p>Теорема (второй признак равенства треугольников — по стороне и двум прилежащим углам)</p>	<p>Если сторона и два прилежащих к ней угла одного треугольника соответственно равны стороне и двум прилежащим к ней углам другого треугольника, то такие треугольники равны.</p>
<p>Теорема (третий признак равенства треугольников — по трем сторонам)</p>	<p>Если три стороны одного треугольника соответственно равны трем сторонам другого треугольника, то такие треугольники равны.</p>

I. По двум сторонам и углу между ними	
II. По стороне и двум прилежащим к ней углам	
III. По трем сторонам	

ПРИМЕР

На рисунке $AC = 6$ дм, $BC = BD$, $\angle ABC = \angle ABD$. Найти AD .

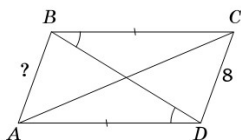


Решение.

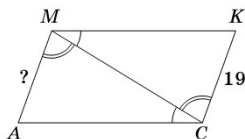
- ① Рассмотрим $\triangle ABC$ и $\triangle ABD$:
 1) AB — общая, $BC = BD$, $\angle ABC = \angle ABD$ (по условию).
- ② Отсюда: $\triangle ABC = \triangle ABD$ (по I признаку).
- ③ $AD = AC$, как соответствующие стороны равных треугольников. Значит, $AD = 6$ дм.
- ④ **Ответ:** 6 дм.

ВЫПОЛНИ САМОСТОЯТЕЛЬНО

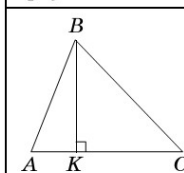
$AD = BC$, $\angle CBD = \angle ADB$,
 $CD = 8$ см.
 Найти AB .



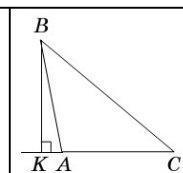
На рисунке
 $\angle AMC = \angle MCK$,
 $\angle KMC = \angle ACM$.
 Найти AM ,
 если $CK = 19$ дм.



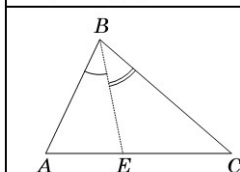
Высотой треугольника, опущенной из данной вершины, называется перпендикуляр, проведенный из этой вершины к прямой, содержащей противоположную сторону треугольника.



$BK \perp AC$,
 BK — высота $\triangle ABC$

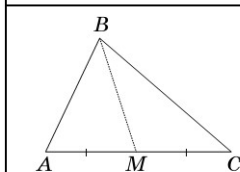


Биссектрисой треугольника, проведенной из данной вершины, называется отрезок биссектрисы угла треугольника, который соединяет эту вершину с точкой на противоположной стороне треугольника.



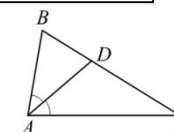
Луч BE — биссектриса $\angle ABC$;
 отрезок BE — биссектриса $\triangle ABC$

Медианой треугольника, проведенной из данной вершины, называется отрезок, соединяющий эту вершину треугольника с серединой противоположной стороны.

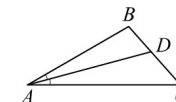


M — середина AC ;
 BM — медиана $\triangle ABC$

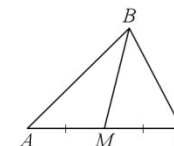
В треугольнике ABC известно, что $\angle BAC = 86^\circ$,
 AD — биссектриса. Найдите угол BAD . Ответ
 дайте в градусах.



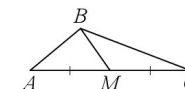
В треугольнике ABC известно, что $\angle BAC = 26^\circ$,
 AD — биссектриса. Найдите угол BAD . Ответ
 дайте в градусах.



В треугольнике ABC известно, что $AC = 52$,
 BM — медиана, $BM = 36$. Найдите AM .

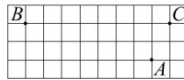


В треугольнике ABC известно, что $AC = 36$,
 BM — медиана, $BM = 13$. Найдите AM .

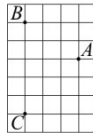


Длина перпендикуляра, проведенного из данной точки к прямой называется расстоянием от точки до прямой.

На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 отмечены три точки: A , B и C . Найдите расстояние от точки A до прямой BC .



На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 отмечены три точки: A , B и C . Найдите расстояние от точки A до прямой BC .



	$\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$
Теорема	Следствие
Сумма углов треугольника равна 180° .	У любого треугольника хотя бы два угла острые.

ПРИМЕР

Найти неизвестный угол треугольника, если два его угла равны 62° и 100° .

Решение.

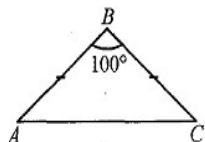
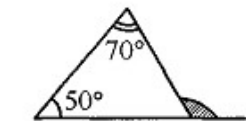
- ① $62^\circ + 100^\circ = 162^\circ$.
- ② $180^\circ - 162^\circ = 18^\circ$.
- ③ **Ответ:** 18° .

ВЫПОЛНИ САМОСТОЯТЕЛЬНО

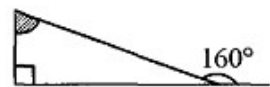
В треугольнике два угла равны 54° и 58° . Найдите его третий угол. Ответ дайте в градусах.



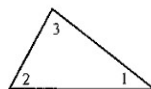
В треугольнике два угла равны 28° и 93° . Найдите его третий угол. Ответ дайте в градусах.



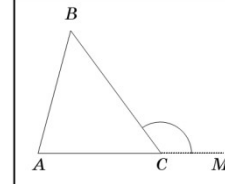
2. $\angle A = ?$



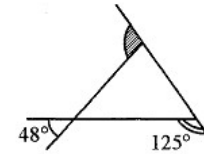
$\angle 1 : \angle 2 : \angle 3 = 3 : 5 : 7$
 $\angle 3 = ?$



Внешний угол треугольника при данной вершине — угол, смежный с углом треугольника при этой вершине.

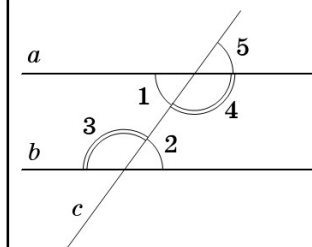


$\angle BCM$ — внешний угол;
 $\angle BCA$ — угол при вершине C



Признаки параллельности прямых

Если внутренние накрест лежащие углы равны, а сумма внутренних односторонних углов равна 180° и соответственные углы равны, то прямые параллельны.



$a \parallel b$ если:

- 1) $\angle 1 = \angle 2$ или $\angle 3 = \angle 4$
(внутренние накрест лежащие при $a \parallel b$ и секущей c);
- 2) $\angle 1 + \angle 3 = 180^\circ$
или $\angle 2 + \angle 4 = 180^\circ$
(внутренние односторонние при $a \parallel b$ и секущей c);
- 3) $\angle 5 = \angle 2$ (соответственные углы)

Свойства параллельных прямых

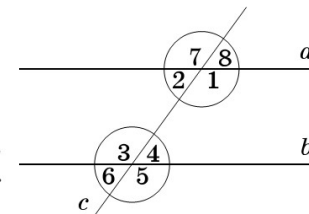
1. Две прямые, параллельные третьей прямой, между собой параллельны.
2. Если две параллельные прямые пересечены третьей прямой, то внутренние накрест лежащие углы равны, а сумма внутренних односторонних углов равна 180° , соответственные углы равны.

ПРИМЕР

Один из углов, образовавшихся при пересечении двух параллельных прямых секущей, равен 70° . Найти остальные семь углов.

Решение.

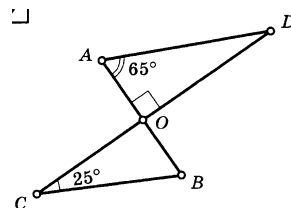
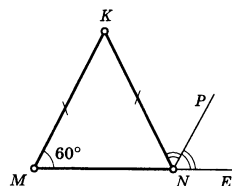
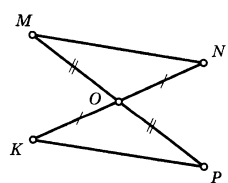
- ① Пусть $a \parallel b$, c — секущая.
 $\angle 1, \angle 2, \angle 3, \angle 4, \angle 5, \angle 6, \angle 7, \angle 8$ — образовавшиеся углы. $\angle 2 = 70^\circ$.
- ② $\angle 2 = \angle 8, \angle 1 = \angle 7, \angle 4 = \angle 6, \angle 3 = \angle 5$ как вертикальные.



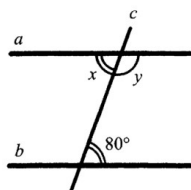
- ③ $\angle 2 = \angle 4$, $\angle 1 = \angle 3$ как внутренние накрест лежащие при $a \parallel b$ и секущей c .
- ④ $\angle 2 + \angle 3 = 180^\circ$ как внутренние односторонние при $a \parallel b$ и секущей c . $\angle 3 = 180^\circ - \angle 2 = 180^\circ - 70^\circ = 110^\circ$.
- ⑤ Итак, $\angle 1 = \angle 3 = \angle 5 = \angle 7 = 110^\circ$, $\angle 2 = \angle 4 = \angle 6 = \angle 8 = 70^\circ$.
- ⑥ **Ответ:** 110° , 110° , 70° , 110° , 70° , 110° , 70° .

ВЫПОЛНИ САМОСТОЯТЕЛЬНО

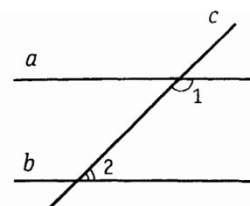
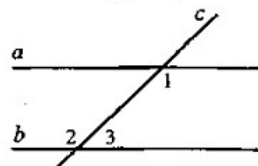
Какие из прямых параллельны? Почему?



Дано: $a \parallel b$.



$a \parallel b$; c — секущая;
 $\angle 1 + \angle 2 = 264^\circ$.
 $\angle 3 = ?$



Дано: $a \parallel b$,
 c — секущая,
 $\angle 1 - \angle 2 = 32^\circ$.

Найдите: $\angle 1$ и $\angle 2$.