

# Неравенство Коши (неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим)

Лабузная Ирина

## 1 Теория

Одним из самых частовстречаемых неравенств, используемых в решениях олимпиадных задач, является неравенство Коши (неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим). Более того, иногда оно может упростить поиск минимумов и максимумов функций, сделав его возможным без использования производных. Рассмотрим верное неравенство  $(x - y)^2 \geq 0$ .

$$x^2 - 2xy + y^2 \geq 0$$

$$x^2 + y^2 \geq 2xy$$

$$\frac{x^2 + y^2}{2} \geq xy$$

Это неравенство верно для любых  $x$  и  $y$ .

Пусть числа  $a$  и  $b$  больше нуля, тогда введем замену:  $x^2 = a, y^2 = b$ , отсюда получаем неравенство Коши для двух чисел в стандартной формулировке:

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab},$$

где в левой части неравенства - **среднее арифметическое** чисел  $a$  и  $b$ , а справа - их **среднее гармоническое**.

Заметим, что также это неравенство выполняется для любого набора положительных чисел  $x_1, x_2, \dots, x_n$ :

$$\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n}$$

## 2 Задачи

### Задача 1

Докажите, что  $a \geq 2\sqrt{a} - 1$  для любых  $a > 0$ .

### Задача 2

Докажите, что  $a + 2b \geq 3\sqrt[3]{ab^2}$  для любых  $a, b > 0$ .

### Задача 3

Докажите, что для любого положительного  $x$  выполняется неравенство:

$$x + \frac{1}{x} \geq 2$$

## 3 Решения

### Задача 1

По неравенству Коши

$$\frac{a+1}{2} \geq \sqrt{a \cdot 1} \iff a+1 \geq 2\sqrt{a},$$

откуда получаем искомое  $a \geq 2\sqrt{a} - 1$

### Задача 2

По неравенству Коши

$$\frac{a+b+b}{3} \geq \sqrt[3]{abb},$$

откуда умножением на три и приведением подобных получаем искомое  $a+2b \geq 3\sqrt[3]{ab^2}$ .

### Задача 3

По неравенству Коши

$$x + \frac{1}{x} \geq 2\sqrt{x \cdot \frac{1}{x}} = 2$$