

# Связь НОД и НОК

Лабузная Ирина Сергеевна

## 1 Определения

**Наибольший общий делитель (НОД)** чисел  $a$  и  $b$  - наибольшее такое число, на которое делятся оба числа  $a$  и  $b$ .

**Наименьшее общее кратное (НОК)** чисел  $a$  и  $b$  - наименьшее такое число, которое делит оба числа  $a$  и  $b$ .

Будем обозначать НОД чисел  $a$  и  $b$  как  $(a, b)$ , а НОК -  $[a, b]$ . Пусть  $a = m_1^{\alpha_1} \cdot m_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot m_n^{\alpha_n}$ , а  $b = m_1^{\beta_1} \cdot m_2^{\beta_2} \cdot \dots \cdot m_n^{\beta_n}$ , где  $\alpha, \beta \geq 0$  и  $\alpha, \beta \in N$

$$(a, b) = m_1^{\gamma_1} \cdot m_2^{\gamma_2} \cdot \dots \cdot m_n^{\gamma_n}$$

$$[a, b] = m_1^{\delta_1} \cdot m_2^{\delta_2} \cdot \dots \cdot m_n^{\delta_n},$$

где  $\gamma_i = \min(\alpha_i, \beta_i)$ , а  $\delta_i = \max(\alpha_i, \beta_i)$

## 2 Произведение НОД и НОК

Рассмотрим произведение НОД и НОК.

$$(a, b) \cdot [a, b] = (m_1^{\gamma_1} \cdot m_2^{\gamma_2} \cdot \dots \cdot m_n^{\gamma_n}) \cdot (m_1^{\delta_1} \cdot m_2^{\delta_2} \cdot \dots \cdot m_n^{\delta_n})$$

$$(a, b) \cdot [a, b] = m_1^{\gamma_1 \delta_1} \cdot m_2^{\gamma_2 \delta_2} \cdot \dots \cdot m_n^{\gamma_n \delta_n}$$

При этом  $\gamma_i \beta_i = \min(\alpha_i, \beta_i) \cdot \max(\alpha_i, \beta_i) = \alpha_i \beta_i$ , откуда

$$(a, b) \cdot [a, b] = m_1^{\alpha_1 \beta_1} \cdot m_2^{\alpha_2 \beta_2} \cdot \dots \cdot m_n^{\alpha_n \beta_n} = a \cdot b$$

Таким образом, можно выразить НОД и НОК друг через друга:

$$(a, b) = \frac{ab}{[a, b]}$$

$$[a, b] = \frac{ab}{(a, b)}$$

### 3 Задания

#### Задача 1

НОК двух чисел равен 30, а их произведение 150. Найдите НОД этих чисел.

#### Задача 2

$a = 21$ , а НОД чисел  $a$  и  $b$  равен 1. Найдите число  $b$ , если их НОК равен 42.