

Конспект урока «Объем шара и его частей»

(записать теоретический материал, оформить решение задач в тетрадь)

Перечень вопросов, рассматриваемых в теме

- Доказательство теорем об объемах шара и его частей и площади сферы
- Определение частей шара
- Решение задач на нахождение объемов шара, его частей и площади сферы

Основная литература:

Атанасян Л.С., Бутузов В.Ф., Кадомцев С.Б. и др. Геометрия 10-11 учебник для общеобразов. учрежд.: база и профильн. М: Просвещение.2009
Атанасян Л.С., Бутузов В.Ф., Кадомцев С.Б. Геометрия. 10–11 классы : учеб. для общеобразоват. организаций : базовый и углубл. уровни и др. – М.: Просвещение, 2014. – 255, сс. 121-126.

Открытые электронные ресурсы:

Образовательный портал “Решу ЕГЭ”. <https://mathb-ege.sdamgia.ru/test?theme=177>

Теоретический материал для самостоятельного изучения

Шаром называется множество всех точек пространства, находящихся от данной точки на расстоянии, не больше данного R .

Радиусом шара называют всякий отрезок, соединяющий центр шара с точкой шаровой поверхности.

Отрезок, соединяющий две точки шаровой поверхности и проходящий через центр шара, называется **диаметром шара**.

Концы любого диаметра шара называются диаметрально противоположными точками шара. Отрезок, соединяющий две любые точки шаровой поверхности и не являющийся диаметром шара, называют **хордой шара**.

Сферическим поясом (шаровым поясом) называют часть [сферы](#), заключенную между двумя [параллельными плоскостями](#)

Шаровым слоем называют часть [шара](#), заключенную между двумя [параллельными плоскостями](#)

Сферическим сегментом называют каждую из двух частей, на которые делит [сферу](#) пересекающая ее плоскость.

Шаровым сегментом называется часть шара, отсекаемая от него какой-нибудь плоскостью.

Шаровым сектором называют фигуру, состоящую из всех отрезков, соединяющих точки [сферического сегмента](#) с центром [сферы](#)

Объем шара равен $V = \frac{4}{3}\pi R^3$.

Объем шарового сегмента равен $V_{\text{ш.сег.}} = \pi h^2 \left(R - \frac{1}{3}h \right)$.

Объем шарового сектора равен $V_{\text{ш.сект}} = \frac{2}{3}\pi R^2 h$.

Объем шарового слоя равен $V = \frac{1}{6}\pi h^3 + \frac{1}{2}\pi h(r_1^2 + r_2^2)$.

Площадь сферы равна $S = 4\pi R^2$.

Примеры и разбор решения заданий

№1. Круговой сектор радиуса R с центральным углом 60° вращается вокруг одного из радиусов, образующих этот угол. Найдите объем тела вращения.

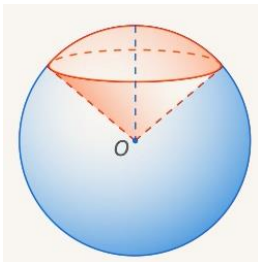
Решение:

При вращении кругового сектора AOB вокруг радиуса OA получается тело вращения - шаровой сектор радиуса $R=OA$ и высотой сектора $h=DA$. Объем его вычисляется по формуле: $V = (2/3) \cdot \pi R^2 \cdot h$. Рассмотрим сечение этого сектора (смотри рисунок): в прямоугольном треугольнике OBD (радиус круга OA перпендикулярен хорде BC) угол BOD равен 60° (дано). Значит Тогда высота шарового сектора равна $h=DA=OA-OD=R-R/2=R/2$.

$$V = (2/3) \cdot \pi \cdot R^2 \cdot R/2 = (1/3)\pi R^3.$$

№2. Найдите объем шарового сектора, если радиус шара равен 6 см, а высота конуса, образующего сектор, составляет треть диаметра шара.

Решение:

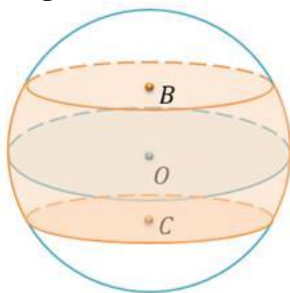


Шаровой сектор — это часть шара, ограниченная кривой поверхностью шарового сегмента и конической поверхностью, основанием которой служит основание сегмента, а вершиной — центр шара. Формула объема шарового сектора: $V = (2/3) \cdot \pi R^2 \cdot h$, где h - высота сегмента. В нашем случае $R = H + h$, где H - высота конуса, а h - высота сегмента. Тогда $h = R - H = 6 - 4 = 2$, так как $H = (1/3) \cdot 2 \cdot R$ (дано). Значит $V = (2/3) \cdot \pi \cdot 36 \cdot 2 = 48\pi$.

Ответ: объем шарового сектора равен 48π

№3. По разные стороны от центра шара проведены два параллельных сечения с площадью 9π и 16π см². Расстояние между сечениями равно 7 см.

Определите объем получившегося шарового слоя.



Решение: запишем формулу для вычисления объема шарового слоя.

$$V_{\text{ш.слоя}} = \frac{1}{6}\pi h^3 + \frac{1}{2}\pi(r_1^2 + r_2^2)h$$

Чтобы найти объём шарового слоя нам необходимо знать его высоту и радиусы двух его оснований.

По условию задачи нам дано расстояние между сечениями, как раз-таки это расстояние и есть высота данного шарового слоя, и она равна $h = 7$ см.

Теперь найдём чему равны радиусы оснований шарового слоя. Напомню, что сечением шара плоскостью является круг. Площадь круга вычисляется по формуле $S_{\text{круга}} = \pi r^2$. Отсюда найдём радиусы оснований шарового слоя.

Тогда имеем, радиус одного основания равен $r_1 = \sqrt{\frac{S_{\text{круга}}}{\pi}} = \sqrt{\frac{9\pi}{\pi}} = 3$ (см),

радиус второго основания равен $r_2 = \sqrt{\frac{S_{\text{круга}}}{\pi}} = \sqrt{\frac{16\pi}{\pi}} = 4$ (см).

Подставим радиусы оснований и высоту шарового слоя в формулу его объёма. Посчитаем. Получаем, что объём данного шарового слоя

равен $V_{\text{ш.слоя}} = \frac{1}{6}\pi \cdot 7^3 + \frac{1}{2}\pi \cdot (3^2 + 4^2) \cdot 7 = \frac{434}{3}\pi$ (см³).