

Конспект урока «Логарифмические неравенства»

Перечень вопросов, рассматриваемых в теме

- 1) Понятие логарифмического неравенства
- 2) Основные способы решения логарифмических неравенств

Глоссарий по теме

Логарифмические неравенства – это неравенства вида $\log_a f(x) > \log_a g(x)$, где $a > 0, a \neq 1$ и неравенства, сводящиеся к этому виду.

Решение логарифмических неравенств:

1. $a > 1$

$$\log_a f(x) > \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > g(x) \\ f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \end{cases}$$

(знак неравенства сохраняется)

1. $0 < a < 1$

$$\log_a f(x) > \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) < g(x) \\ f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \end{cases}$$

(знак неравенства меняется)

Теоретический материал для самостоятельного изучения

Логарифмические неравенства – это неравенства вида $\log_a f(x) > \log_a g(x)$, где $a > 0, a \neq 1$ и неравенства, сводящиеся к этому виду.

Способы решения логарифмических неравенств основаны на монотонности логарифмической функции в зависимости от основания логарифма. Функция возрастает, если $a > 1$ и убывает, если $0 < a < 1$.

1. $a > 1$

$$\log_a f(x) > \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > g(x) \\ f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \end{cases}$$

(знак неравенства сохраняется)

1. $0 < a < 1$

$$\log_a f(x) > \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) < g(x) \\ f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \end{cases}$$

(знак неравенства меняется)

Пример 1.

Решить неравенство $\log_3(2x - 4) > \log_3(14 - x)$.

Решение:

Основание логарифма $3 > 1$, значит используем 1 схему.

$$\begin{cases} 2x - 4 > 14 - x \\ 2x - 4 > 0 \\ 14 - x > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 6 \\ x > 2 \\ x < 14 \end{cases} ; 6 < x < 14.$$

Ответ: (6; 14)

Пример 2.

Решить неравенство $\log_{\frac{1}{3}}(x+15) \geq \log_{\frac{1}{3}}(x-1) - 2$.

Решение:

Выполним преобразование правой части: заменим $-2 = \log_{\frac{1}{3}} 9$ и используем свойство суммы логарифмов.

$$\log_{\frac{1}{3}}(x+15) \geq \log_{\frac{1}{3}}(x-1) + \log_{\frac{1}{3}} 9;$$

$$\log_{\frac{1}{3}}(x+15) \geq \log_{\frac{1}{3}}(9 \cdot (x-1))$$

Основание логарифма $0 < \frac{1}{3} < 1$, значит используем 2 схему.

$$\begin{cases} x+15 \leq 9 \cdot (x-1) \\ x+15 > 0 \\ x-1 > 0 \end{cases} \begin{cases} -8x \leq -24 \\ x > -15 \\ x > 1 \end{cases} \begin{cases} x \geq 3 \\ x > -15 \\ x > 1 \end{cases} ; x \geq 3.$$

Ответ: $[3; +\infty)$

Решение логарифмических уравнений и неравенств встречается в заданиях ГИА.

Задача 1. Решите неравенство

$$(\log_2(x+4,2) + 2)(\log_2(x+4,2) - 3) \geq 0.$$

Решение:

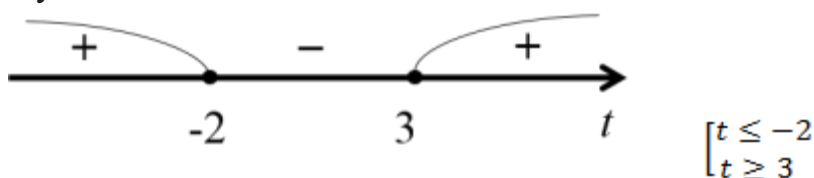
$$\text{Замена: } \log_2(x+4,2) = t.$$

$$(t+2)(t-3) \geq 0.$$

Рассмотрим функцию: $f(t) = (t+2)(t-3)$.

$D(f): \mathbb{R}$

Нули: $t = -2$ и $t = 3$



Обратная замена: $\begin{cases} \log_2(x+4,2) \leq -2 \\ \log_2(x+4,2) \geq 3 \end{cases}$

Используем определение логарифма, учитывая, что основание $2 > 1$.

$$\begin{cases} x+4,2 \leq 2^{-2} \\ x+4,2 \geq 2^3 \\ x+4,2 > 0 \end{cases} \begin{cases} x+4,2 \leq 0,25 \\ x+4,2 \geq 8 \\ x+4,2 > 0 \end{cases} \begin{cases} x \leq -3,95 \\ x \geq 3,8 \\ x > -4,2 \end{cases} ;$$

Ответ: $(-4,2; -3,95] \cup [3,8; +\infty)$

Задача 2. Решите неравенство

$$\log_{x-3}(x^2 - 12x + 36) \leq 0.$$

Решение:

$$\log_{x-3}(x-6)^2 \leq 0;$$

Квадраты противоположных чисел равны, поэтому применяя свойство логарифма степени, не забываем поставить модуль.

$$2\log_{x-3}|x-6| \leq 0;$$

$$\log_{x-3}|x-6| \leq 0;$$

Т. к. основание логарифма содержит переменную, необходимо рассмотреть 2 случая.

$$1. x - 3 > 1.$$

$$\begin{cases} |x - 6| \leq (x - 3)^0 \\ |x - 6| > 0 \\ x - 3 > 1 \end{cases} ; \begin{cases} |x - 6| \leq 1 \\ x \neq 6 \\ x > 4 \end{cases} ; \begin{cases} -1 \leq x - 6 \leq 1 \\ x \neq 6 \\ x > 4 \end{cases} ;$$

$$\begin{cases} 5 \leq x \leq 7 \\ x \neq 6 \\ x > 4 \end{cases} ; [5; 6) \cup (6; 7].$$

$$2. 0 < x - 3 < 1.$$

$$\begin{cases} |x - 6| \geq (x - 3)^0 \\ |x - 6| > 0 \\ 0 < x - 3 < 1 \end{cases} ; \begin{cases} |x - 6| \geq 1 \\ x \neq 6 \\ 3 < x < 4 \end{cases} ; \begin{cases} x - 6 \leq -1 \\ x - 6 \geq 1 \\ x \neq 6 \\ 3 < x < 4 \end{cases} ;$$

$$\begin{cases} x \leq 5 \\ x \geq 7 \\ x \neq 6 \\ 3 < x < 4 \end{cases} ; (3; 4).$$

Ответ: $(3; 4) \cup [5; 6) \cup (6; 7]$.

Примеры и разбор решения заданий тренировочного модуля

№1. Найдите наименьшее целочисленное решение неравенства $\log_{0,5} 4^{\log_4(x-2)} + \log_{0,5}(x-2) > -4$.

Решение:

- Упростим левую часть неравенства, используя основное логарифмическое тождество:

$$\log_{0,5}(x-2) + \log_{0,5}(x-2) > -4$$

- Приведем подобные слагаемые.

$$2 \log_{0,5}(x-2) > -4$$

- Разделим неравенство на 2. ($2 > 0$, знак неравенства не меняем):

$$\log_{0,5}(x-2) > -2$$

- Основание логарифма $0 < 0,5 < 1$, значит логарифмическая функция убывает и знак неравенства меняем:

$$\begin{cases} x - 2 < 0,5^{-2} \\ x - 2 > 0 \end{cases} ; \begin{cases} x < 4 \\ x > 2 \end{cases} ; 2 < x < 4.$$

Ответ: 3.

№2 Сколько натуральных чисел являются решениями неравенства $-2 < \log_{0,5}(x-3) < -1$.

Решение:

- Двойное неравенство равносильно системе неравенств:

$$\begin{cases} \log_{0,5}(x-3) > -2 \\ \log_{0,5}(x-3) < -1 \end{cases}$$

- Основание логарифма $0 < 0,5 < 1$, значит логарифмическая функция убывает и знак неравенства меняем:

$$\begin{cases} x-3 < 0,5^{-2} \\ x-3 > 0,5^{-1} \\ x-3 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-3 < 4 \\ x-3 > 2 \\ x-3 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < 7 \\ x > 5 \\ x > 3 \end{cases} \Rightarrow (5; 7).$$

Ответ: 1.