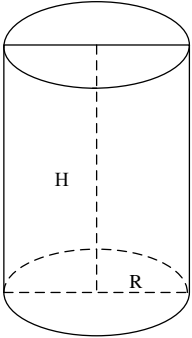
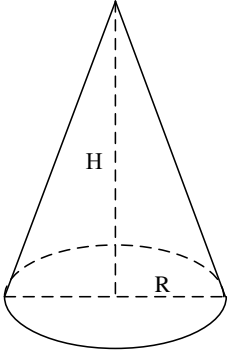
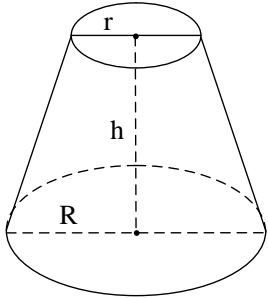
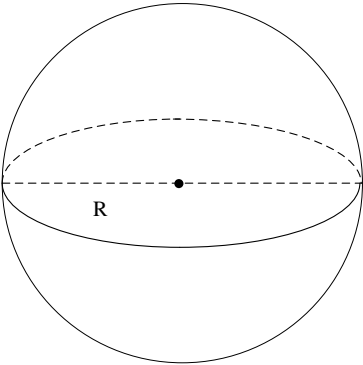


Практикум «Решение задач на нахождение объёмов тел вращения».
Дистанционная форма обучения.

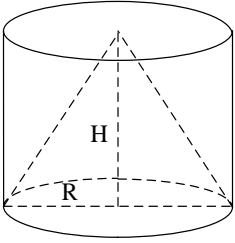
1. Теоретический материал.

Вид круглого тела	Формула объёма
<p>1. Цилиндр</p> 	$V = \pi R^2 H$
<p>2. Конус</p> 	$V = \frac{1}{3} \pi R^2 H$
<p>3. Усеченный конус</p> 	$V = \frac{1}{3} \pi h (R^2 + Rr + r^2)$
<p>6. Шар</p> 	$V = \frac{4}{3} \pi R^3$

2. Решение задач.

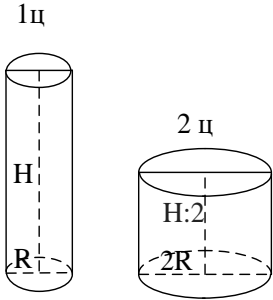
Задача № 1

Цилиндр и конус имеют общее основание и общую высоту. Вычислите объем цилиндра, если объем конуса равен 36 см^3 .

<p>Дано: $R_{\text{ц}} = R_{\text{к}} = R$; $H_{\text{ц}} = H_{\text{к}} = H$; $V_{\text{к}} = 36 \text{ см}^3$ Найти: $V_{\text{ц}}$</p> 	<p>Решение.</p> $V_{\text{ц}} = \pi R^2 H; \quad V_{\text{к}} = \frac{1}{3} \pi R^2 H,$ <p>следовательно объем цилиндра в 3 раза больше объема конуса.</p> $V_{\text{ц}} = 3 V_{\text{к}};$ $V_{\text{ц}} = 3 \cdot 36 = 108 (\text{см}^3)$ <p>Ответ. 108 см^3</p>
--	---

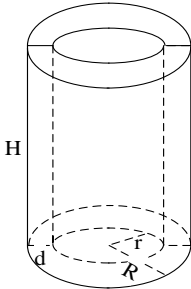
Задача № 2

Высота одного цилиндра вдвое больше высоты второго цилиндра, но его радиус в два раза меньше радиуса второго цилиндра. Найти отношение их объёмов

<p>Дано: $R_{1\text{ц}} = R$; $H_{1\text{ц}} = H$; $R_{2\text{ц}} = 2R$; $H_{2\text{ц}} = \frac{1}{2} H$; Найти: $\frac{V_{1\text{ц}}}{V_{2\text{ц}}}$</p> 	<p>Решение.</p> $V_{1\text{ц}} = \pi R^2 H;$ $V_{1\text{ц}} = \pi (2R)^2 \left(\frac{1}{2} H \right) = \pi 4R^2 \cdot \frac{1}{2} H = 2\pi R^2 H$ $\frac{V_{1\text{ц}}}{V_{2\text{ц}}} = \frac{\pi R^2 H}{2\pi R^2 H} = \frac{1}{2}$ <p>Ответ. $\frac{V_{1\text{ц}}}{V_{2\text{ц}}} = \frac{1}{2}$</p>
---	--

Задача № 3.

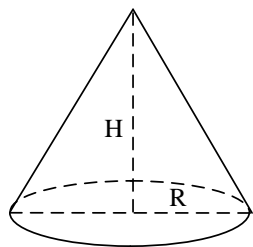
Найти объем 25м цилиндрической трубы (полого цилиндра), если внешний радиус равен 50см, диаметр стенок равен 10см.

	<p>Дано: полый цилиндр; $R = 50 \text{ см} = 0,5 \text{ м}$; $d = 10 \text{ см} = 0,1 \text{ м}$ $H = 25 \text{ м}$ Найти: V</p> <p>Решение.</p> $V = \pi H (R^2 - r^2); \quad r = R - d; \quad r = 0,5 - 0,1 = 0,4 (\text{м})$ $V = \pi \cdot 25 (0,5^2 - 0,4^2) = 25\pi (0,25 - 0,16) =$ $= 25\pi \cdot 0,09 = 2,25\pi (\text{м}^3)$ <p>Ответ. $2,25 \pi \text{ м}^3$</p>
---	--

Задача № 4.

Объём конуса равен 36π , а его высота равна 12. Найдите радиус основания конуса.

Дано: конус;
 $H=12$; $V = 36\pi$
 Найти: R



Решение.

$$V_k = \frac{1}{3} \pi R^2 H; \quad 36\pi = \frac{1}{3} \pi R^2 \cdot 12; \quad 4\pi R^2 = 36\pi;$$

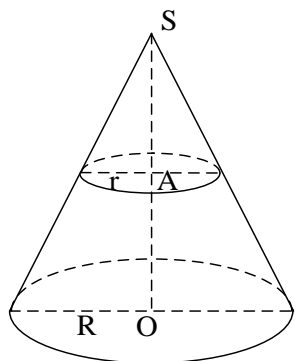
$$4R^2 = 36; \quad R^2 = 36:4 = 9; \quad R = \sqrt{9} = 3$$

Ответ. 3

Задача № 5

Объём конуса равен 24 см^3 . Через середину высоты параллельно основанию конуса проведено сечение, которое является основанием меньшего конуса с той же вершиной. Найдите объём меньшего конуса.

Дано: конус
 $V_{\text{бк}} = 24 \text{ см}^3$; $SA = \frac{1}{2} SO$
 Найти: $V_{\text{мк}}$



Решение:

Так как $SA = \frac{1}{2} SO$, то два конуса подобны.

Коэффициент подобия $k=2$, следовательно

$$\frac{V_{\text{бк}}}{V_{\text{мк}}} = k^3; \quad \frac{24}{V_{\text{мк}}} = 2^3; \quad 8 V_{\text{мк}} = 24; \quad V_{\text{мк}} = 24:8=3$$

Или:

$$V_{\text{бк}} = \frac{1}{3} \pi R^2 SO \quad V_{\text{мк}} = \frac{1}{3} \pi r^2 \cdot SA; \quad R = 2r; \quad SO = 2SA$$

$$\frac{V_{\text{бк}}}{V_{\text{мк}}} = \frac{\frac{1}{3} \pi R^2 SO}{\frac{1}{3} \pi r^2 SA};$$

$$\frac{V_{\text{бк}}}{V_{\text{мк}}} = \frac{R^2 SO}{r^2 SA} = \frac{(2r)^2 \cdot 2SA}{r^2 SA} = \frac{8r^2 SA}{r^2 SA} = 8;$$

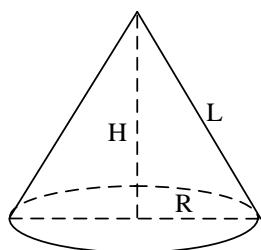
$$8 V_{\text{мк}} = 24; \quad V_{\text{мк}} = 24:8=3$$

Ответ. 3

Задача № 6

Диаметр основания конуса равен 16, а длина образующей — 17. Найдите объём конуса.

Дано: конус, $D=16$; $L=17$
 Найти: V



Решение:

$$V_k = \frac{1}{3} \pi R^2 H;$$

$\triangle SAO$ - прямоугольный, так как SO - высота конуса, по теореме Пифагора найдем H .

$$R = \frac{1}{2} D = 8(\text{см})$$

$$H^2 = L^2 - R^2; \quad H^2 = 17^2 - 8^2 = 289 - 64 = 225;$$

$$H = \sqrt{225} = 15;$$

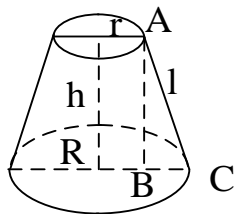
$$V_k = \frac{1}{3} \pi \cdot 8^2 \cdot 15 = 320\pi$$

Ответ. 320π

Задача № 7

Радиусы оснований усечённого конуса равны 4 и 12, а образующая равна 10. Вычислить объем усечённого конуса.

Дано: усеченный конус;
 $R=12$; $r=4$; $l=10$.
 Найти: $V_{\text{ус.к}}$



Решение:

$$V = \frac{1}{3} \pi h (R^2 + Rr + r^2)$$

Высоту усеченного конуса найдем из прямоугольного треугольника ABC (AB провели параллельно h)

$$AB^2 = AC^2 - BC^2; BC = R - r = 12 - 4 = 8$$

$$AB^2 = 10^2 - 8^2 = 100 - 64 = 36; AB = 6; h = 6$$

$$V = \frac{1}{3} \pi \cdot 6 \cdot (12^2 + 12 \cdot 4 + 4^2) = 2\pi \cdot 208 = 416\pi$$

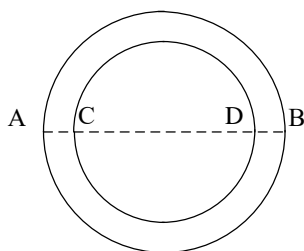
Ответ. 416π

Задача № 8

Внутренний диаметр полого шара равен 8 см, а толщина стенок равна 2 см. Найдите объем материала, из которого сделан шар.

Дано: полый шар;
 $CD = 8$ см; $AC = 2$ см
 Найти: V

Рассмотрим сечение полого шара диаметральной плоскостью.



Решение:

$$V = V_1 - V_2; V_1 = \frac{4}{3} \pi R^3; V_2 = \frac{4}{3} \pi r^3; r = \frac{1}{2} CD; R = r + AC$$

$$r = \frac{1}{2} CD = \frac{1}{2} \cdot 8 = 4 \text{ (см)}; R = 4 + 2 = 6 \text{ (см)}$$

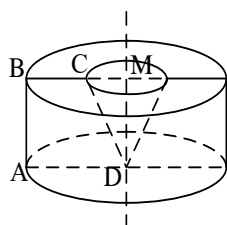
$$V = \frac{4}{3} \pi (R^3 - r^3) = \frac{4}{3} \pi (6^3 - 4^3) = \frac{4}{3} \pi (216 - 64) = \frac{4}{3} \pi \cdot 152 = \frac{608}{3} \pi \text{ (см}^3\text{)}$$

$$\text{Ответ. } \frac{608}{3} \pi \text{ (см}^3\text{)}$$

Задача № 9

Прямоугольная трапеция с основаниями 11 см и 17 см и высотой 12 см вращается около прямой, проходящей через вершину острого угла перпендикулярно основаниям. Найдите объем полученного тела вращения.

Дано: ABCD - трапеция; $\angle BAD = 90^\circ$;
 $BC = 11$ см; $AD = 17$ см;
 $AB = 12$ см.
 Найти: $V_{\text{тела вращения}}$



Решение:

При вращении трапеции ABCD получим цилиндр, радиус его основания $R = AD = 17$ см, высотой $H = AB = 12$ см, из которого вырезан конус с радиусом основания

$$r = CM = AD - BC$$

$$r = 17 - 11 = 6 \text{ см, высота } h = AB = 12 \text{ см.}$$

$$V_{\text{т.вр.}} = V_{\text{цил.}} - V_{\text{кон}}$$

$$V_{\text{цил.}} = \pi R^2 H; V_{\text{цил.}} = \pi \cdot 17^2 \cdot 12 = \pi \cdot 289 \cdot 12 = 3468\pi \text{ (см}^3\text{)} ;$$

$$V_{\text{кон}} = \frac{1}{3} \pi r^2 h; V_{\text{кон}} = \frac{1}{3} \pi \cdot 6^2 \cdot 12 = 144\pi \text{ (см}^3\text{)}$$

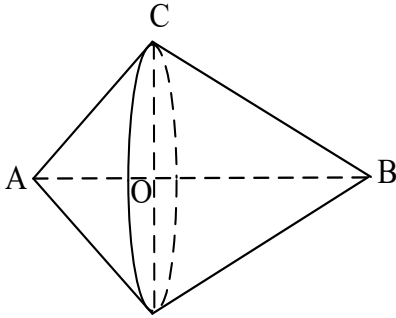
$$V_{\text{т.вр.}} = 3468\pi - 144\pi = 3324\pi \text{ (см}^3\text{)}$$

Ответ. $3324\pi \text{ см}^3$

Задача № 10.

Прямоугольный треугольник с катетами 20 см и 15 см вращается вокруг гипотенузы .
Найти объём полученного тела вращения.

Дано: $\triangle ABC$ - прямоугольный,
 $\angle C = 90^\circ$;
 $AC = 15$ см; $BC = 20$ см.
 Найти: $V_{\text{тела вращения}}$



Решение:

При вращении прямоугольного треугольника ABC вокруг гипотенузы получается тело вращения, состоящее из двух конусов с общим основанием. Радиус R этого основания есть перпендикуляр CO , опущенный из вершины прямого угла на гипотенузу.

$$V_{\text{т.вр.}} = V_{1 \text{ кон.}} + V_{2 \text{ кон.}}$$

$$V_{1 \text{ кон.}} = \frac{1}{3} \pi R^2 \cdot AO; \quad V_{2 \text{ кон.}} = \frac{1}{3} \pi R^2 \cdot OB$$

$$V_{\text{т.вр.}} = \frac{1}{3} \pi R^2 (AO + OB) = \frac{1}{3} \pi R^2 \cdot AB$$

По теореме Пифагора найдем гипотенузу AB
 $AB^2 = AC^2 + BC^2$; $AB^2 = 15^2 + 20^2 = 225 + 400 = 625$;

$$AB = \sqrt{625} = 25 \text{ см}$$

Чтобы найти R , из треугольника ABC определим $\sin A$.

$$\sin A = \frac{BC}{AB}; \quad \sin A = \frac{20}{25} = \frac{4}{5};$$

Из прямоугольного треугольника AOC

$$\sin A = \frac{OC}{AC}; \quad \frac{OC}{15} = \frac{4}{5}; \quad OC = \frac{4}{5} \cdot 15 = 12 \text{ (см)}; \quad R = 12 \text{ см}$$

$$V_{\text{т.вр.}} = \frac{1}{3} \pi \cdot 12^2 \cdot 25 = 1200 \pi (\text{см}^3)$$

Ответ. $1200 \pi \text{ см}^3$

Задания для самостоятельного решения.

1. Даны две кружки цилиндрической формы. Первая кружка в полтора раза ниже второй, а вторая вдвое шире первой. Во сколько раз объём второй кружки больше объёма первой?
2. Однородный шар диаметром 3 см имеет массу 162 грамма. Чему равна масса шара, изготовленного из того же материала, с диаметром 2 см? Ответ дайте в граммах.
3. Осевое сечение конуса равносторонний треугольник, сторона которого равна 12 см. Найдите объём конуса.
4. Найти объём тела, полученного в результате вращения прямоугольного треугольника вокруг гипотенузы, если катеты равны 3 см и 4 см.
5. Прямоугольная трапеция с основанием 5 см и 8 см и высотой 4 см вращается около большего основания. Найдите объём тела вращения.