

Тема «Экстремумы функции»

Перечень вопросов, рассматриваемых в теме

- 1) Определение точек максимума и минимума функции
- 2) Определение точки экстремума функции
- 3) Условия достаточные для нахождения точек экстремума функции

Глоссарий по теме

Возрастание функции. Функция $y=f(x)$ возрастает на интервале X , если для любых x_1 и x_2 , $x_1 > x_2$ из этого промежутка выполняется неравенство $f(x_1) > f(x_2)$. Другими словами – большему значению аргумента соответствует большее значение функции.

Максимум функции. Значение функции в точке максимума называют максимумом функции

Минимум функции. Значение функции в точке минимума называют минимумом функции

Производная (функции в точке) — основное понятие дифференциального исчисления, которое характеризует скорость изменения функции (в конкретной точке).

Точка максимума функции. Точку x_0 называют точкой максимума функции $y = f(x)$, если для всех x из ее окрестности справедливо неравенство $f(x_1) \leq f(x_2)$.

Точка минимума функции. Точку x_0 называют точкой минимума функции $y = f(x)$, если для всех x из ее окрестности справедливо неравенство $f(x_1) \geq f(x_2)$.

Точки экстремума функции. Точки минимума и максимума называют точками экстремума.

Убывание функции. Функция $y = f(x)$ убывает на интервале X , если для любых x_1 и x_2 , $x_1 > x_2$ из этого промежутка выполняется неравенство $f(x_1) < f(x_2)$. Другими словами – большему значению аргумента соответствует большее значение функции.

Алгоритм исследования функции на монотонность и экстремумы:

- 1) Найти область определения функции $D(f)$
- 2) Найти $f'(x)$.
- 3) Найти стационарные ($f'(x) = 0$) и критические ($f'(x)$ не существует) точки функции $y = f(x)$.
- 4) Отметить стационарные и критические точки на числовой прямой и определить знаки производной на получившихся промежутках.
- 5) Сделать выводы о монотонности функции и точках ее экстремума.

Теоретический материал для самостоятельного изучения

Точки, в которых происходит изменение характера монотонности функции – это ТОЧКИ ЭКСТРЕМУМА.

- Точку $x = x_0$ называют **точкой минимума** функции $y = f(x)$, если у этой точки существует окрестность, для всех точек которой выполняется неравенство $f(x) \geq f(x_0)$.
- Точку $x = x_0$ называют **точкой максимума** функции $y = f(x)$, если у этой точки существует окрестность, для всех точек которой выполняется неравенство $f(x) \leq f(x_0)$.

Точки максимума и минимума – точки экстремума.

Функция может иметь неограниченное количество экстремумов.

Критическая точка – это точка, производная в которой равна 0 или не существует.

Важно помнить, что любая точка экстремума является критической точкой, но не всякая критическая является экстремальной.

Алгоритм нахождения максимума/минимума функции на отрезке:

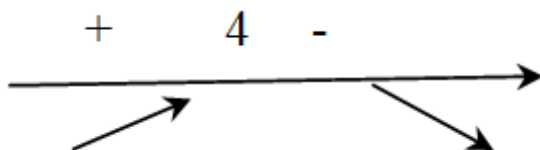
1. найти экстремальные точки функции, принадлежащие отрезку,
2. найти значение функции в экстремальных точках из пункта 1 и в концах отрезка,
3. выбрать из полученных значений максимальное и минимальное.

Примеры и разбор решения заданий тренировочного модуля

№1. Определите промежуток монотонности функции $y = x^2 - 8x + 5$

Решение: Найдем производную заданной функции: $y' = 2x - 8$

$$2x - 8 = 0$$



$$x = 4$$

Определяем знак производной функции и изобразим на рисунке, следовательно, функция возрастает при $x \in (4; +\infty)$; убывает при $x \in (-\infty; 4)$

Ответ: возрастает при $x \in (4; +\infty)$; убывает при $x \in (-\infty; 4)$

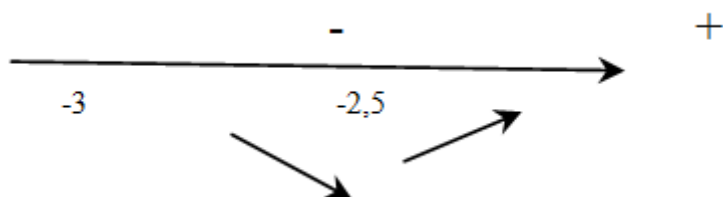
№2. Найдите точку минимума функции $y = 2x - \ln(x+3) + 9$

Решение: Найдем производную заданной функции: $y' = 2 - \frac{1}{x+3}$

Найдем нули производной: $2 - \frac{1}{x+3} = 0$

$$x = -2,5$$

Определим знаки производной функции и изобразим на рисунке поведение функции:



Ответ: -2,5 точка min

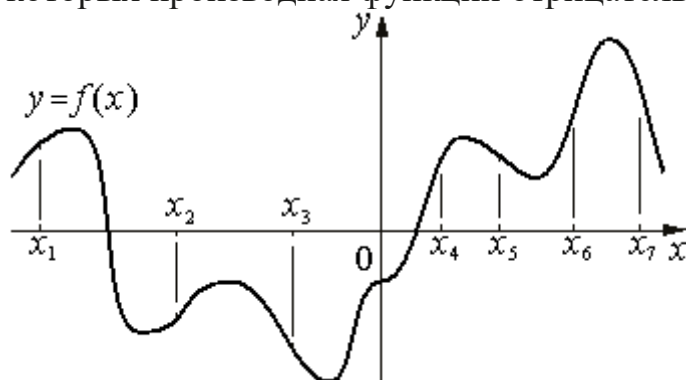
№3. Материальная точка движется прямолинейно по закону $x(t) = 10t^2 - 48t + 15$, где x - расстояние от точки отсчета в метрах, t - время в секундах, измеренное с начала движения. Найдите ее скорость (в метрах в секунду) в момент времени $t = 3$ с.

Решение: Если нас интересует движение автомобиля, то, принимая в качестве функции зависимость пройденного расстояния от времени, с помощью производной мы получим зависимость скорости от времени.

$V = x'(t) = 20t - 48$. Подставляем вместо t 3с и получаем ответ. $V = 12$ м\с

Ответ: $V = 12$ м\с

№4. На рисунке изображен график функции. На оси абсцисс отмечены семь точек: $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7$. Определите количество целых точек, в которых производная функции отрицательна.



Решение: Производная функции отрицательна на тех интервалах, на которых функция убывает. В данном случае это точки x_3, x_5, x_7 . Следовательно, таких точек 3

Ответ: 3