

Муниципальное бюджетное общеобразовательное учреждение средняя
общеобразовательная школа №73 им. А.Ф. Чернонога города Воронежа

Исследовательская работа
по математике и информатике
на тему: «Эйлеровы графы. Компьютерное представление графов»

Выполнил: ученик 10 Б класса
Жабин Данил

Руководители: Милютина Татьяна Викторовна,
учитель математики
Жабина Светлана Александровна,
учитель информатики

Воронеж - 2021

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	3
1. ОПИСАНИЕ ЗАДАЧИ Л. ЭЙЛЕРА	5
1.1. «ЗАДАЧА О КЁНИГСБЕРГСКИХ МОСТАХ»	5
1.2. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ТЕОРИИ ГРАФОВ.....	6
1.3. ТЕОРЕМА Л. ЭЙЛЕРА.....	8
2. СОСТАВЛЕНИЕ ПРОГРАММЫ ДЛЯ ЗАДАЧИ ЭЙЛЕРА.....	11
2.1. КОМПЬЮТЕРНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ГРАФОВ.....	11
2.2. ЗАДАНИЕ СТЕПЕНЕЙ ВЕРШИН.....	12
2.3. ПРОВЕРКА ЭЙЛЕРОВОСТИ ГРАФОВ.....	13
ЗАДАЧИ.....	14
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	16
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ.....	17

ВВЕДЕНИЕ

Одним из важнейших применений информационных компьютерных технологий является разработка программ для решения практических задач. Для написания программ используются различные языки программирования. Однако для того чтобы разработать программу необходимо сначала построить математическую модель и алгоритм решения задач.

Для разработки математической модели могут использоваться различные математические методы. Очень многие важные для практического применения задачи могут быть решены с использованием теории графов. Теория графов - это относительно молодой раздел математики, который позволяет исследовать объекты, состоящие из нескольких элементов, связанных между собой каким-либо способом.

Исторически сложилось так, что теория графов зародилась именно в ходе решения головоломок почти триста лет назад. Очень долго она находилась в стороне от главных направлений исследований ученых, была в царстве математики на положении Золушки, чьи дарования раскрылись в полной мере лишь тогда, когда она оказалась в центре общего внимания.

В настоящее время графы эффективно используются в теории планирования и управления, теории расписаний, социологии, математической лингвистике, экономике, биологии, медицине.

Широкое применение находят графы и в информатике и информационных компьютерных технологиях: графами описываются структуры любой компьютерной программы, структура телекоммуникационных или компьютерных сетей и многие другие объекты.

В настоящее время теория графов быстро развивается, находит все новые приложения.

Исторически самой первой задачей по теории графов считается, которую решил в 1736 году академик Петербургской академии наук Леонард

Эйлер. Попутно он фактически придумал понятие графа и способ моделирования различных объектов с помощью графов.

Данная курсовая работа посвящена описанию этой задачи и способу ее решения и разработке программы ее решения на языке TurboPascal.

1. ОПИСАНИЕ ЗАДАЧИ Л. ЭЙЛЕРА

1.1. «ЗАДАЧА О КЁНИГСБЕРГСКИХ МОСТАХ»

В городе Кёнигсберге (современный Калининград, Россия) было семь мостов, соединяющие левый и правый берега реки Прегель и два острова, расположенные на ней. Располагались они так, как показано на рисунке.

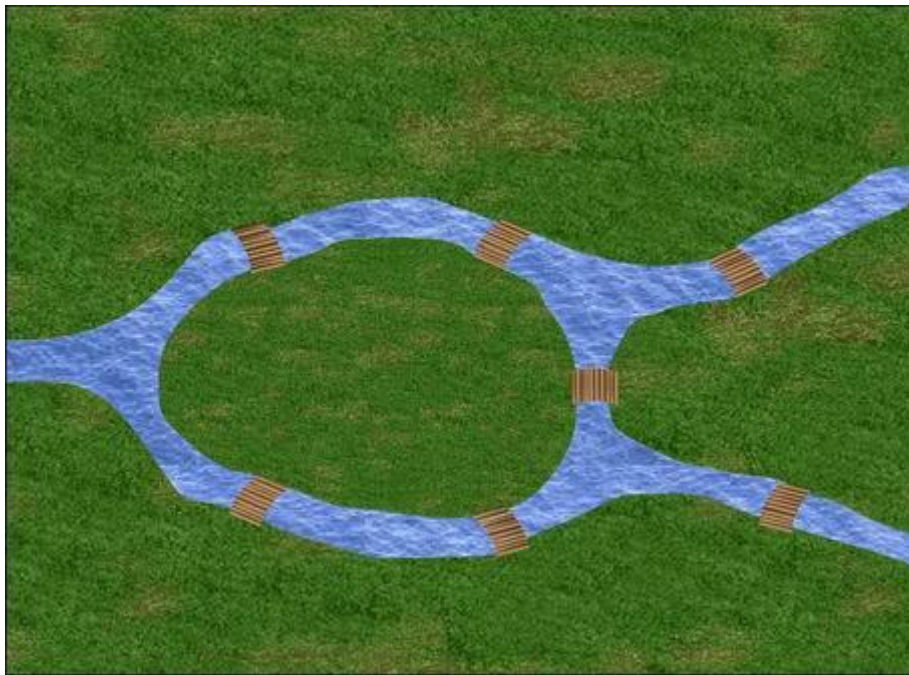


Рис. 1. Кенигсбергские мосты

Однажды великому математику Леонарду Эйлеру был задан вопрос: можно ли обойти все семь мостов, побывав на каждом только по одному разу?

Рассмотрев эту задачу, в 1736 году Эйлер доказал, что это невозможно, причем он рассмотрел более общую задачу: какие местности, разделенные

рукавами рек и соединенные мостами, возможно обойти, побывав на каждом мосту ровно один раз, а какие невозможно.

Для этого он заменил каждый участок суши, то есть берега реки и острова кружочками, а мосты — линиями, соединяющими кружочки. В результате он получил следующий рисунок.

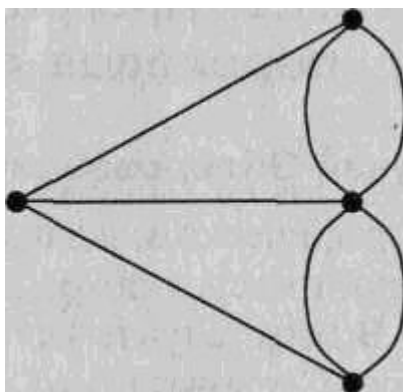


Рис. 2. Предложенное Л. Эйлером геометрическое изображение
Кёнигсбергских мостов.

Для того, чтобы описать его решение нам удобно ввести современные определения, используемые в теории графов.

1.2. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ТЕОРИИ ГРАФОВ

Графом G называется пара множеств $G = (V, E)$, где

$V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ - множество *вершин*.

$E = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ - множество *ребер*.

При этом каждое ребро e_i считается связанным с одной или двумя вершинами:

$$e_i \rightarrow \{v_j\},$$

$$e_i \rightarrow \{v_j, v_k\}.$$

Ребра, связанные только с одной вершиной, называются *петлями*.

Графы удобно изображать геометрически: вершины изображают кружочками, а ребра – плавными линиями, соединяющими вершины, с которыми они связаны. Пример геометрического изображения графа с множеством вершин $V = \{v_1, v_2, \dots, v_5\}$ и множеством ребер $E = \{e_1, e_2, \dots, e_8\}$ приведен на рисунке (рёбра e_2 и e_8 являются петлями).

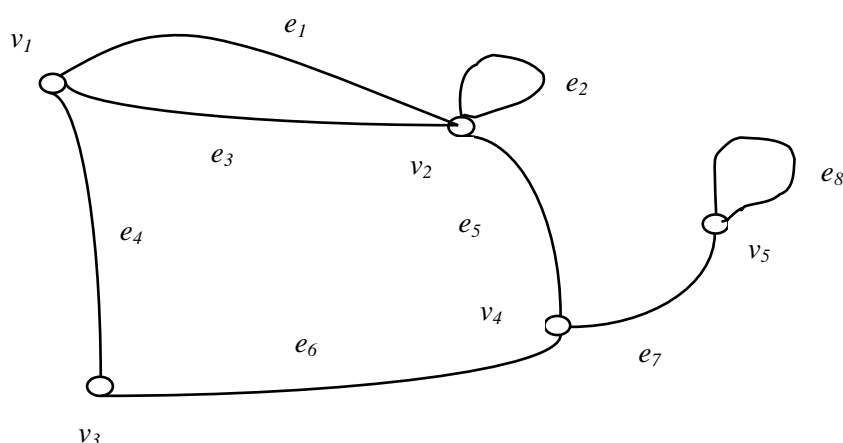


Рис. 3. Пример геометрического изображения графа

При этом местоположение и форма изображений вершин и ребер значение не имеет. Важно лишь, чтобы правильно указывались связи между вершинами и ребрами.

Для каждой вершины может быть найдено число, называемое *степенью* этой вершины, то есть число ребер, связанных с этой вершиной (если ребро является петлей, то оно учитывается дважды). Например, степень вершины v_1 - 3, а вершины v_2 - 5.

Путь называется последовательность вершин и связанных с ними ребер. Например: $v_1, e_1, v_2, e_2, v_2, e_5, v_4$.

Циклом называется путь, первая и последняя вершины которого совпадают. Например: v_1, e_1, v_2, e_3, v_1 .

Граф называется *связным*, если между любыми двумя его вершинами существует путь. Например описанный выше граф называется связным.

Приведем формулировку теоремы, доказанной Л. Эйлером.

1.3. ТЕОРЕМА Л. ЭЙЛЕРА

Для формулировки теоремы нам потребуются дополнительные определения.

Цикл называется *эйлеровым*, если он содержит все ребра графа и каждая только один раз.

Путь называется *эйлеровым*, если он не является циклом и содержит все ребра графа и каждая только один раз.

Граф называется *эйлеровым*, если он содержит хотя бы один эйлеров цикл.

Граф называется *полуэйлеровым*, если он содержит хотя бы один эйлеров путь.

Граф называется *неэйлеровым*, если он не содержит ни одного эйлерова цикла или пути.

Теорема Л. Эйлера.

- 1) Граф является эйлеровым тогда и только тогда, когда он является связным и степени всех его вершин – чётные.
- 2) Граф является полуэйлеровым тогда и только тогда, когда он является связным и степени всех его вершин, кроме двух, – чётные. При этом эйлеров путь начинается в одной вершине с нечетной степенью и заканчивается в другой вершине.
- 3) Граф является неэйлеровым тогда и только тогда, когда он является несвязным или степени более, чем двух его вершин нечётные.

Доказательство.

- 1) Пусть граф является эйлеровым.

Связность графа следует из определения эйлерова цикла. Эйлеров цикл содержит каждое ребро и притом только один раз, поэтому, сколько раз эйлеров путь приведет конец карандаша в вершину, столько и выведет, причем уже по другому ребру. Следовательно, степень каждой вершины графа должна состоять из двух одинаковых слагаемых: одно – результат подсчета «входов» в вершину, другое – «выходов».

Докажем обратное. Пусть граф связный и все его вершины – чётные.

Возьмем произвольную вершину A и начнем из нее путь по одному из ребер. Будем продолжать путь, проходя каждый раз по новому ребру. Все вершины графа имеют четные степени, поэтому, если есть «выход» из вершины, то должен быть и «вход» в неё, а если есть «вход» в вершину, то должен быть и «выход» из неё.

Так как число рёбер конечно, то этот путь должен закончиться.

Если путь содержит все рёбра графа, то найден эйлеров цикл.

Если остались непройденные рёбра, то должна существовать вершина B , принадлежащая пройденному пути и связанная с непройденным путём. Начнём новый путь в вершине B , содержащий непройденные рёбра. Так как число «входов» равно числу «выходов», то новый путь также завершится в вершине B .

Объединим оба найденных пути в один. Если новый путь содержит все рёбра графа, то найден эйлеров цикл. Если – нет, то найдем новый цикл.

Число рёбер и вершин конечно, поэтому процесс закончится за конечное число шагов.

2) Пусть граф является полуэйлеровым.

Связность графа следует из определений эйлерова пути.

Если путь начинается в A , а заканчивается в другой вершине B , то A и B – нечётные, даже если путь неоднократно проходил через A и B . В любую другую вершину графа путь должен был привести и вывести из неё, то есть все остальные вершины должны быть чётными.

Докажем обратное. Пусть граф связный и все его вершины, кроме двух A и B – чётные.

Добавим к графу новое ребро e , соединяющее A и B . Тогда все вершины графа станут чётными. Следовательно, верна часть теоремы Эйлера и в нём существует эйлеров цикл. Его можно начать с любой вершины. Начнём его с вершины A и ребра e . Цикл должен закончиться тоже в вершине A . Если теперь удалить ребро e , то останется эйлеров путь с началом в вершине B и концом в вершине A .

3) Доказательство следует из того, что верны части 1) и 2).

2. СОСТАВЛЕНИЕ ПРОГРАММЫ ДЛЯ ЗАДАЧИ ЭЙЛЕРА

2.1. КОМПЬЮТЕРНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ГРАФОВ

Очень важно уметь задавать графы так, чтобы можно было решать задачи на компьютере.

Для этого можно использовать двумерные массивы.

Если граф имеет n вершин, то его можно описать целочисленным массивом

m : array $[1..n, 1..n]$ of integer;

по следующему правилу:

$m[i, j]$ – число рёбер, соединяющих вершину v_i с вершиной v_j , если $i \neq j$;

$m[i, i]$ – удвоенное число петель, связанных с вершиной v_i .

Например, граф, изображенный на рис. 3 может быть задан следующим образом:

	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5
v_1	0	2	1	0	0
v_2	2	2	0	1	0
v_3	1	0	0	1	0
v_4	0	1	1	0	1
v_5	0	0	0	1	2

2.2. ЗАДАНИЕ СТЕПЕНЕЙ ВЕРШИН

Степени вершин графов могут быть заданы одномерным целочисленным массивом:

s: array [1..n] of integer;

по следующему правилу:

s[*i*] – степень вершины v_i .

Известно, что элементы массива *s*[*i*] - это суммы строк (или столбцов) массива *m*[*i*, *j*]. Поэтому их можно найти следующим образом:

```
for i:=1 to n do
  begin
    s[i]:=0;
    for j:=1 to n do
      s[i]:= s[i]+ m[i, j]
    end
```

Например, для графа, изображенного на рис. 3 массив *s*[*i*] будет иметь следующий вид:

	<i>s</i> [<i>i</i>]
v_1	3
v_2	5
v_3	2
v_4	3
v_5	3

2.3. ПРОВЕРКА ЭЙЛЕРОВОСТИ ГРАФОВ

Проверить, каким является ли граф эйлеровым, полуэйлеровым или неэйлеровым, можно подсчитав число нечетных вершин с помощью операции *mod*:

```
sum:=0;  
for i:=1 to n do  
if s[i] mod 2<>0 then  
    sum:= sum+1
```

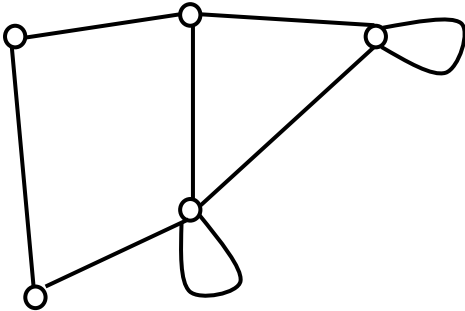
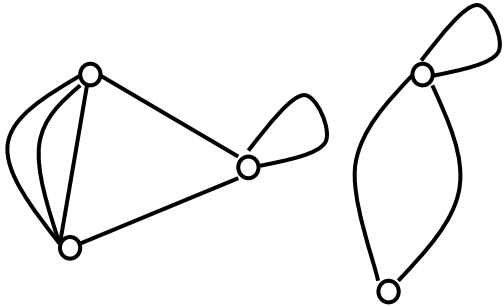
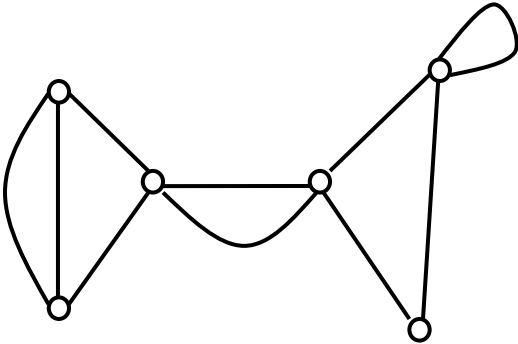
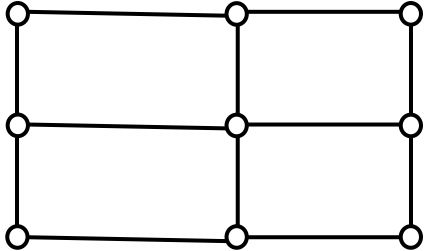
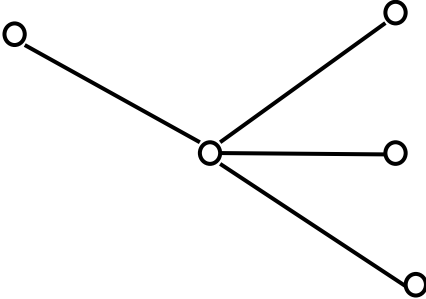
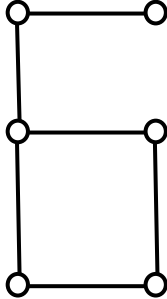
С помощью теоремы Эйлера можно определить вид графа в зависимости от значения *sum* следующим образом:

```
if sum =0 then  
    writeln ('граф эйлеров');  
if sum =2 then  
    writeln ('граф полуэйлеров');  
if sum >2 then  
    writeln ('граф неэйлеров')
```

Таким образом, граф, изображенный на рис. 3, является неэйлеровым.

ЗАДАЧИ

Задача 1. Определить вид следующих графов, используя теорему Эйлера.

<p>а)</p> 	<p>б)</p> 
<p>в)</p> 	<p>г)</p> 
<p>д)</p> 	<p>е)</p> 

Задача 2. Составить программу на языке TurboPascal, которая позволяет

- а) представлять произвольный граф с n вершинами с помощью двумерного массива;
- б) определять вид графа.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Все четыре вершины в графе описанной выше задачи о Кёнигсбергских мостах нечётные. Поэтому в соответствии с частью 3) теоремы Л. Эйлера этот граф неэйлеров, то есть не содержит ни эйлерова цикла, ни эйлерова пути.

Описанная нами задача Л. Эйлера давно перестала быть развлекательной задачей. К этой задаче могут быть сведены некоторые практически важные задачи. Рассмотрим одну из них.

Представим, что перед нами карта города. Заменим перекрестки вершинами, а улицы – ребрами. В результате получится граф. Пусть нам требуется объехать все улицы, например, для проверки дорог или патрулирования в ночное время. Для экономии времени и бензина сделать это требуется так, чтобы на каждой улице побывать только один раз. Решение этой задачи сводится к решению задачи Л. Эйлера. Действительно, заменим перекрестки вершинами, а улицы – ребрами. В результате получится граф. Если граф эйлеров или полуэйлеров, то решение задачи имеется. Это можно проверить с помощью разработанной нами программы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Березина Л.Ю. Графы и их применение. – М.: Просвещение, 1979. – 143 с.
2. Емеличев В.А., Мельников О.И., Сарванов В.И., Тышкевич Р.И. Лекции по теории графов. – М.: Наука, 1990. – 484 с.
3. Практикум по TurboPascal.

Интересно, что на карте старого Кёнигсберга был ещё один мост, появившийся чуть позже, и соединявший остров Ломзе с южной стороной города. Своему появлению этот мост обязан задаче Эйлера. Произошло это так.

Кайзер (император) Вильгельм славился своей прямоотой, простотой мышления и считался недалёким. Однажды на светском рауте его хотели сделать жертвой шутки, которую с ним решили сыграть учёные умы, присутствующие на приёме. Однако они сами стали жертвами своеобразной шутки кайзера.

Кайзеру показали карту Кёнигсберга, и попросили попробовать решить знаменитую задачу, которая, как тогда уже было известно, была нерешаемой. Ко всеобщему удивлению, кайзер попросил перо и лист бумаги, сказав, что решит задачу за полторы минуты. Ошеломлённые немецкие учёные не могли поверить своим ушам, но бумагу и чернила быстро нашли. Кайзер положил листок на стол, взял перо, и написал: «приказываю построить восьмой мост на остров Ломзе». Так в Кёнигсберге и появился новый мост, который так и называли — мост Кайзера.

Новый граф, содержащий восемь рёбер, стал теперь содержать только две нечетные вершины и, следовательно, превратился в полуэйлеров. Поэтому в нем имелся путь, содержащий все ребра графа.