

Тема «Первообразная»

Перечень вопросов, рассматриваемых в теме

- 1) Нахождение первообразной
- 2) Определение первообразной, график которой проходит через заданную точку
- 3) Решение задач, обратных задаче нахождения закона изменения скорости материальной точки по закону ее движения

Глоссарий по теме

Функцию $y = F(x)$ называют **первообразной** для функции $y = f(x)$ на промежутке X , если для $x \in X$ выполняется равенство $F'(x) = f(x)$.

Таблица первообразных:

| Функция $f(x)$ | Первообразная $F(x)$ |
|----------------------|---------------------------|
| 0 | $C = const$ |
| 1 | $x + C$ |
| $x^n, n \neq -1$ | $\frac{x^{n+1}}{n+1} + C$ |
| $\frac{1}{x}, x > 0$ | $\ln x + C$ |
| $\cos x$ | $\sin x + C$ |
| $\sin x$ | $-\cos x + C$ |
| e^x | $e^x + C$ |

Теоретический материал для самостоятельного изучения

Сегодня мы познакомимся с новым математическим понятием – первообразной. Что это такое?

Для начала обратимся к задаче, которая поможет сформулировать определение первообразной.

С точки зрения механики скорость прямолинейного движения определяется как производная пути по времени. Если некоторая точка прошла путь $S(t)$, то ее мгновенная скорость $v(t) = S'(t)$. Если теперь рассмотреть обратную задачу – нахождение пути, пройденного точкой с заданной скоростью, то придем к функции $S(t)$, которую называют первообразной функции $v(t)$, т.е. такой функцией, что $S'(t) = v(t)$.

Итак, функцию $y = F(x)$ называют **первообразной** для функции $y = f(x)$ на промежутке X , если для $x \in X$ выполняется равенство $F'(x) = f(x)$.

Как следует из определения, операция нахождения первообразной – обратна нахождению производной функции

Примеры и разбор решения заданий тренировочного модуля

№1. Материальная точка движется прямолинейно со скоростью $v(t) = 8t - 4$. Найдите закон движения точки, если в момент времени $t = 2$ с пройденный путь составил 4 м.

Решение:

Воспользуемся определением первообразной, т.к. $S(t) = v_0 t + at^2/2$

$$S'(t) = v(t).$$

Найдем все первообразные $S(t) = -4t + 4t^2 + c$.

Подставим $t = 2$ с и пройденный путь $S = 4$ м.

$$4 = -8 + 16 + c$$

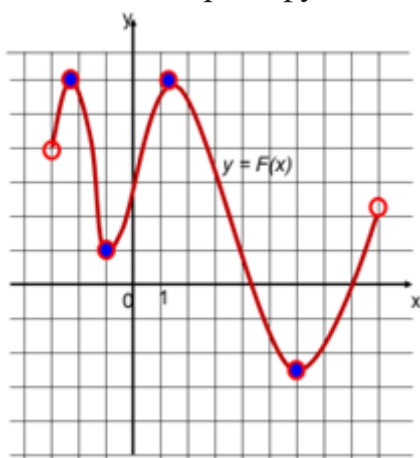
$$c = -4.$$

Следовательно, закон движения будет выглядеть следующим образом:

$$s(t) = 4t^2 - 4t - 4$$

$$\text{Ответ: } s(t) = 4t^2 - 4t - 4$$

№2. По графику первообразной функции $y = F(x)$ определите количество точек, в которых функция $y = f(x)$ равна нулю.

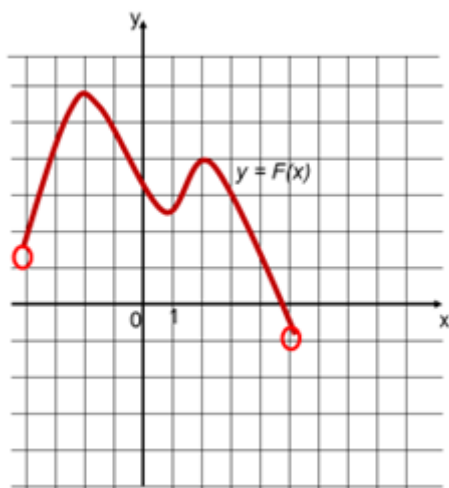


Решение:

Так как $F'(x) = f(x)$ - по определению первообразной, то точки, в которых функция $f(x)$ (производная функции $F(x)$) – это точки экстремума функции $F(x)$. А таких точек на графике 4.

Ответ: 4.

№3. По графику первообразной функции $y = F(x)$ определите числовые промежутки, на которых функция $y = f(x)$ имеет отрицательный знак.



Решение:

Так как $F'(x) = f(x)$ - по определению первообразной, то числовые промежутки, на которых функция $f(x)$ (производная функции $F(x)$) имеет отрицательный знак – это промежутки убывания функции $F(x)$. Таких промежутков на данном графике 2. Это $(-2; 1)$ и $(2; 5)$.

Ответ: $(-2; 1)$; $(2; 5)$.

№4. Докажите, что функция $y = F(x)$ является первообразной для функции $y = f(x)$.

$$F(x) = x^2 - e^{2x} + 2, f(x) = 2x - 2e^{2x}$$

Решение:

Доказательство.

$$F'(x) = (x^2 - e^{2x} + 2)' = 2x - 2e^{2x}$$

По определению первообразной, $F'(x) = f(x)$, следовательно, $F'(x)$ и есть первообразная для функции $f(x)$

№5. Для функции $f(x) = x^2$ найти первообразную, график которой проходит через точку $(-3; 10)$.

Решение:

Найдем все первообразные функции $f(x)$: $F(x) = \frac{x^3}{3} + c$

Найдем число C , такое, чтобы график функции $f(x) = x^2$ проходил через точку $(-3; 10)$. Подставим $x = -3$, $y = 10$, получим:

$$10 = (-3)^3/3 + c$$

$$C = 19$$

Следовательно, $F(x) = \frac{x^3}{3} + 19$

Ответ: $F(x) = \frac{x^3}{3} + 19$