

## Практическая работа

**Тема:** Комплексные числа и действия над ними.

**Цель:** закрепить навыки действий над комплексными числами в разных формах.

**Теоретическая часть:** Комплексным числом  $z$  называется выражение  $z = a + bi$ , где  $a$  и  $b$  – действительные числа,  $i$  – мнимая единица, которая определяется соотношением:  $i^2 = -1$ ;  $i = \sqrt{-1}$ .

Число  $a$  называется действительной частью числа  $z$ , а  $b$  – мнимой частью.

Числа  $z = a + bi$  и  $z = a - bi$  называются комплексно – сопряженными.

Два комплексных числа  $z_1 = a + bi$  и  $z_2 = c + di$ , называются равными, если соответственно равны их действительные и мнимые части :  $a = c$ ;  $b = d$ .

$z = a + bi$  – алгебраическая форма комплексного числа

$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$  – тригонометрическая форма

$z = re^{i\varphi}$  – показательная форма

### Действия с комплексными числами в алгебраической форме.

$$z_1 = a + bi$$

$$z_2 = c + di$$

1. Сложение и вычитание комплексных чисел:

$$z_1 + z_2 = (a + bi) \pm (c + di) = (a \pm c) + (b \pm d)i$$

2. Произведение комплексных чисел:

$$z_1 \cdot z_2 = (a + bi) \cdot (c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

3. Деление комплексных чисел:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(a + bi)}{(c + di)} = \frac{(a + bi) \cdot (c - di)}{(c + di) \cdot (c - di)} = \frac{(a + bi) \cdot (c - di)}{c^2 + d^2}$$

### Тригонометрическая форма комплексного числа

$$Z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi);$$

Модуль комплексного числа  $r$  можно найти по формуле  $r = \sqrt{a^2 + b^2}$

Величину угла  $\varphi$  можно найти по формуле  $\cos \varphi = \frac{a}{r}$ ;  $\sin \varphi = \frac{b}{r}$

Показательная форма комплексного числа  $Z = re^{i\varphi}$

## Действия над комплексными числами в тригонометрической форме.

$$z_1 = r_1 \cdot (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)$$

$$z_2 = r_2 \cdot (\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)$$

1. Произведение комплексных чисел:

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2))$$

2. Деление комплексных чисел:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} \cdot (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2))$$

3. Возведение в степень:

$$z^n = r^n (\cos \varphi n + i \sin \varphi n)$$

4. Извлечение корня  $n$  – ой степени:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} \left( \cos \frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2\pi k}{n} \right)$$

## Примеры и решения

### №1 Решить квадратное уравнение:

$$x^2 - 6x + 13 = 0$$

Решение:  $a=1$ ,  $b=-6$ ,  $c=13$ . Найдем  $D=b^2 - 4ac$ ;

$$D = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 13 = 35 - 52 = -16$$

Корни уравнения находим по формулам  $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$$x_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{-16}}{2} = \frac{6 \pm 4i}{2} = 3 \pm 2i; \text{ таким образом}$$

$$x_1 = 3 + 2i \quad x_2 = 3 - 2i$$

Ответ:  $x_1 = 3 + 2i$ ;  $x_2 = 3 - 2i$ .

### №2 Найти значения $x$ и $y$ из равенства $(2x+3y) + (x-y)i = 7 + 6i$

Решение: из условия равенства комплексных чисел следует

$$\begin{cases} 2x + 3y = 7, \\ x - y = 6 \end{cases}$$

Умножив второе уравнение на 3, и сложив результат с первым уравнением, имеем

$5x = 25$ , т.е.  $x = 5$ . Подставим это значение во второе уравнение:  $5 - y = 6$ , откуда

$y = -1$ . Итак, получаем ответ:  $x = 5, y = -1$ .

### №3 Даны комплексные числа $z_1 = 5 + 3i$ , $z_2 = 7 - 4i$

Найти

а)  $z_1 + z_2$     б)  $z_1 - z_2$     в)  $z_1 \cdot z_2$

Решение:

$$\text{а) } z_1 + z_2 = (5 + 3i) + (7 - 4i) = 5 + 3i + 7 - 4i = 12 - i$$

$$\text{б) } z_1 - z_2 = (5 + 3i) - (7 - 4i) = 5 + 3i - 7 + 4i = -2 + 7i$$

$$\text{в) } z_1 \cdot z_2 = (5 + 3i) \cdot (7 - 4i) = 35 - 20i + 21i - 12i^2 = 35 + i - 12 \cdot (-1) = 35 + i + 12 = 47 + i$$

г).

**№4** Выполнить деление  $\frac{3+2i}{7-5i}$ :

Решение:

$$\begin{aligned} \frac{3+2i}{7-5i} &= \frac{(3+2i) \cdot (7+5i)}{(7-5i) \cdot (7+5i)} = \frac{21+15i+14i+10i^2}{49-25i^2} = \frac{11+29i}{74} \\ &= \frac{11}{74} + \frac{29}{74}i \end{aligned}$$

**№5** Записать число  $Z = 3 - 3i\sqrt{3}$  в тригонометрической и показательной формах.

Решение: 1. Так как  $a=3$ ,  $b=-3\sqrt{3}$ , то  $r = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{3^2 + (-3\sqrt{3})^2} = \sqrt{9 + 9 \cdot 3} = 6$

2. Геометрически определяем, что числу  $z$  соответствует точка  $Z$ , лежащая в 4 четверти

3. Составим отношения  $\cos \varphi = \frac{a}{r} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ ,  $\sin \varphi = \frac{b}{r} = \frac{-3\sqrt{3}}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ . Отсюда следует, что  $\varphi = 360^\circ - 60^\circ = 300^\circ$  или  $\varphi = 2\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{3}$

4. Итак,  $z = 6(\cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3})$  - тригонометрическая форма числа

$Z = 6e^{\frac{5\pi}{3}i}$  - показательная форма числа.

**№6** Даны комплексные числа  $z_1 = 3(\cos 330^\circ + i \sin 330^\circ)$

$$z_2 = 2(\cos 60^\circ + i \sin 60^\circ)$$

Найти:

$$\text{а) } z_1 \cdot z_2 \quad \text{б) } z_1/z_2 \quad \text{в) } z_2^4 \quad \text{г) } \sqrt[3]{z_1}$$

Решение:

$$a) z_1 \cdot z_2 = 2 \cdot 3(\cos(330^\circ + 60^\circ) + i \sin(330^\circ + 60^\circ)) = 6(\cos 390^\circ + i \sin 390^\circ) = 6(\cos 30^\circ + i \sin 30^\circ) = 6\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i \frac{1}{2}\right) = 3\sqrt{3} + 3i$$

$$б) \frac{z_1}{z_2} = \frac{2}{3}(\cos(330^\circ - 60^\circ) + i \sin(330^\circ - 60^\circ)) = \frac{2}{3}(\cos 270^\circ + i \sin 270^\circ) = 1,5 \cdot (0 + i \cdot (-1)) = -1,5i$$

$$в) z_2^4 = [2(\cos 60^\circ + i \sin 60^\circ)]^4 = 2^4[\cos(60^\circ \cdot 4) + i \sin(60^\circ \cdot 4)] = 16(\cos 240^\circ + i \sin 240^\circ)$$

Используем формулы приведения

$$\cos 240^\circ = \cos(180^\circ + 60^\circ) = -\cos 60^\circ = -\frac{1}{2}$$

$$\sin 240^\circ = \sin(180^\circ + 60^\circ) = -\sin 60^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$z_2^4 = 16\left(\cos 240^\circ + i \sin 240^\circ\right) = 16\left(-\frac{1}{2} + i\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right) = -8 - 8 \cdot \sqrt{3}i$$

$$г) \sqrt[3]{z_1} = \sqrt[3]{3}\left(\cos \frac{330^\circ + 360^\circ k}{3} + i \sin \frac{330^\circ + 360^\circ k}{3}\right),$$

где  $k$  принимает значение 0,1,2.

$$\text{Если } k = 0, \text{ то } z_1^{(1)} = \sqrt[3]{3}(\cos 110^\circ + i \sin 110^\circ)$$

$$\text{Если } k = 1, \text{ то } z_1^{(2)} = \sqrt[3]{3}(\cos 230^\circ + i \sin 230^\circ)$$

$$\text{Если } k = 2, \text{ то } z_1^{(3)} = \sqrt[3]{3}(\cos 350^\circ + i \sin 350^\circ)$$

### **Задание для самостоятельного решения:**

1. Решить уравнение:

$$x^2 + 2x + 5 = 0$$

$$x^2 - 6x + 18 = 0$$

2. Найти действительные числа  $x$  и  $y$  из условия равенства двух комплексных чисел:

$$5x - 2y + (x + y)i = 4 + 5i$$

$$2xi + 3yi + 17 = 3x + 2y + 18i$$

3. Даны комплексные числа:

$$z_1 = 5 + 3i \text{ и } z_2 = 2 - 7i$$

$$z_1 = 2 + 6i \text{ и } z_2 = 3 + 5i$$

Найти: а)  $z_1 + z_2$     б)  $z_1 - z_2$     в)  $z_1 \cdot z_2$     г)  $\frac{z_1}{z_2}$

4. Записать комплексное число в тригонометрической и показательной формах:

$$z = 1 - \sqrt{3}i$$

$$z = -\sqrt{3} + i$$

5.Найти:  $z_1 \cdot z_2$ ;  $\frac{z_1}{z_2}$ ;  $z_1^4$ ;  $\sqrt[3]{z_2}$ , если

$$z_1 = 1 - i; z_2 = -2 - 2i$$

$$z_1 = 2\sqrt{3} - 2i; z_2 = \sqrt{3} + i$$

Действия произвести, предварительно записав комплексные числа в тригонометрической форме.

### **Критерии оценки**

«5»-выполнены правильно все задания

«4»-выполнены правильно любые четыре задания

«3»-выполнены правильно любые три задания

«2»-выполнено правильно только два задания

### **Рекомендуемая литература**

1. В.Т. Лисичкин, И.Л.Соловейчик. Математика: учебное пособие для техникумов
- 2.Н.В.Богомолов, Л.Ю.Сергеенко. Сборник дидактических заданий по математике: учебное пособие для ссузов.
3. Алгебра и начала анализа под ред. Г.Н.Яковлева «Математика для техникумов».