

# Примеры применения интеграла в физике и геометрии

# Контрольные вопросы

1. Назовите несколько примеров областей применения определённого интеграла.
2. Перечислите приложения определённого интеграла к вычислению физических величин.
3. Опишите применение интеграла к вычислению пути, пройденного телом при прямолинейном движении.
4. Разберите и запишите условие и решение трёх примеров вычисления пути, пройденного телом при прямолинейном движении.
5. Опишите применение интеграла к вычислению работы силы, произведённой при прямолинейном движении тела.
6. Разберите и запишите условие и решение двух примеров вычисления работы силы, произведённой при прямолинейном движении тела.
7. Назовите геометрическое приложение определённого интеграла.
8. Опишите применение интегралов к вычислению объёмов тел вращения.
9. Разберите и запишите условие и решение примера вычисления пути, пройденного телом при прямолинейном движении.

# Применение интегралов

Процесс нахождения первообразной называется **интегрированием**.

С помощью определённого интеграла можно решать различные задачи физики, химии, геометрии, механики и т.д., которые трудно или невозможно решить методами элементарной математики.

Сегодня мы рассмотрим, каким образом используется интегрирование в физике и геометрии.

# Применение интегралов в физике

- 1) Вычисление пути, пройденного телом при прямолинейном движении.**
- 2) Вычисление работы силы, произведённой при прямолинейном движении.**
- 3) Вычисление работы, производимой при поднятии груза.**
- 4) Вычисление давления жидкости на вертикально расположенную пластину.**

*Рассмотрим более подробно первые два случая*

# Применение интегралов в физике

## 1. Вычисление пути, пройденного телом при прямолинейном движении

Мы помним, что скорость – это первая производная перемещения. Но так как мы знаем, что интегрирование и нахождение производной – это два взаимобратных процесса, то мы можем предполагать, что, если для нахождения скорости, нужно было найти производную от перемещения, то для нахождения перемещения по скорости, необходимо произвести интегрирование заданной функции.

Путь, пройденный точкой при неравномерном движении по прямой с переменной скоростью  $v$  за промежуток времени от  $t_1$  до  $t_2$  вычисляется по формуле:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} v(t) dt$$

# Примеры вычисления пути, пройденного телом при прямолинейном движении

**Пример1.** Скорость движения точки изменяется по закону  $v = 3t^2 + 2t + 1 \text{ м/с}$ . Найти путь, пройденный точкой за 10 с от начала движения

**Решение:**

$$s = \int_0^{10} (3t^2 + 2t + 1) dt = \left( t^3 + t^2 + t \right) \Big|_0^{10} = 10^3 + 10^2 + 10 = 1110 (\text{м})$$

# Примеры вычисления пути, пройденного телом при прямолинейном движении

**Пример 2.** Скорость движения точки  $v = 9t^2 - 8t$  м/с. Найти путь, пройденный точкой за 4-ю секунду.

**Решение:**

$$\begin{aligned} s &= \int_3^4 (9t^2 - 8t) dt = \left( 3t^3 - 4t^2 \right) \Big|_3^4 = (3 \cdot 4^3 - 4 \cdot 4^2) - (3 \cdot 3^3 - 4 \cdot 3^2) \\ &= 192 - 64 - 81 + 36 = 83(\text{м}) \end{aligned}$$

# Примеры вычисления пути, пройденного телом при прямолинейном движении

**Пример 3.** Скорость движения точки  $v = 12t - 3t^2$  м/с .  
Найти путь, пройденный точкой от начала движения до её остановки.

**Решение:**

$$\begin{aligned} s &= \int_0^4 (12t - 3t^2) dt = (6t^2 - t^3) \Big|_0^4 = (6 \cdot 4^2 - 4^3) - 0 = \\ &= 96 - 64 = 32(\text{м}) \end{aligned}$$



# Применение интегралов в физике

## 2. Вычисление работы силы, произведённой при прямолинейном движении тела

Еще одной физической величиной, которая находится с помощью интегрирования, является работа. Для нахождения работы необходимо найти определенный интеграл функции силы по перемещению. Работа, произведённая переменной силой  $f(x)$  при перемещении по оси  $Ox$  материальной точки от  $x=a$  до  $x=b$ , вычисляется по формуле:

$$A = \int_a^b f(x) dx$$

При решении задач на вычисление работы силы часто используется закон Гука:

$$F=kx,$$

где  $F$ -сила,  $H$ ;  $x$ -абсолютное удлинение пружины,  $m$ , вызванное силой  $F$ , а  $k$ - коэффициент пропорциональности,  $H/m$

# Примеры вычисления работы силы, произведённой при прямолинейном движении тела

**Пример1.** Пружина в спокойном состоянии имеет длину 0,2 м. Сила в 50 Н растягивает пружину на 0,01м. Какую работу надо совершить, чтобы растянуть её от 0,22 до 0,32 м?

**Решение:** по закону Гука:  $50=0,01k$ , т.е.  $k=5000 \text{ Н/м}$ . Находим пределы интегрирования  $a=0,22-0,2=0,02(\text{м})$ ,  $b=0,32-0,2=0,12(\text{м})$ . Теперь по формуле получим:

$$A = \int_{0,02}^{0,12} 5000x dx = 5000 \frac{x^2}{2} \Big|_{0,02}^{0,12} = 2500(0,0144 - 0,0004) = 2500 \cdot 0,014 = 35(\text{Дж})$$

# Примеры вычисления работы силы, произведённой при прямолинейном движении тела

**Пример2.** При сжатии пружины на 0,05 м затрачивается работа 25 Дж. Какую работу необходимо совершить, чтобы сжать пружину на 0,1 м?

**Решение:** зная величину сжатия пружины- 0,05м и произведённую при этом работу – 25Дж, воспользуемся формулой:

$$25 = \int_0^{0,05} kx dx = k \frac{x^2}{2} \Big|_0^{0,05} = 0,00125k$$

Откуда  $k=25/0,00125=20000(\text{Н/м})$ . Теперь по этой же формуле находим:

$$A = \int_0^{0,1} 20000x dx = 20000 \frac{x^2}{2} \Big|_0^{0,1} = 20000 \cdot \frac{0,01}{2} = 100(\text{Джс})$$

# Применение интегралов в геометрии

- 1) Вычисление площадей плоских фигур.**
- 2) Вычисление объёмов тел вращения.**

*Мы уже рассматривали ранее вычисление площадей плоских фигур с помощью определённого интеграла, поэтому рассмотрим более подробно применение определённого интеграла к вычислению объёмов тел вращения.*

# Применение интегралов к вычислению объёмов тел вращения

Объём фигуры, образованной в результате вращения вокруг оси  $Ox$  криволинейной трапеции, ограниченной непрерывной кривой  $y=f(x)$ , осью  $Ox$  и прямыми  $x=a$  и  $x=b$ , вычисляется по формуле:

$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx$$

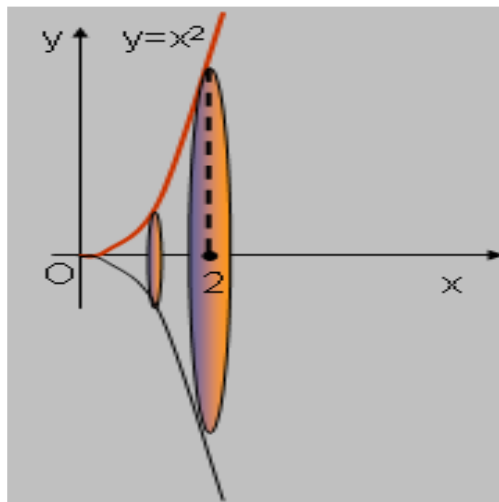
Аналогично, объём фигуры, образованной в результате вращения вокруг оси  $Oy$  криволинейной трапеции, ограниченной непрерывной кривой  $x=f(y)$ , осью  $Ox$  и прямыми  $y=a$  и  $y=b$ , вычисляется по формуле:

$$V = \pi \int_a^b [\phi(y)]^2 dy$$

# Применение интегралов к вычислению объёмов тел вращения

**Пример 1.** Пусть тело образовано вращением параболы  $y=x^2$  на отрезке  $[0;2]$  вокруг оси  $Ox$ . Найдите объём тела вращения.

**Решение:** Построим тело вращения, образованное вращением фигуры вокруг оси  $Ox$ .



$$V = \int_0^2 S(x) dx = \int_0^2 \pi \cdot (x^2)^2 dx = \pi \int_0^2 x^4 dx = \pi \frac{x^5}{5} \Big|_0^2 = \frac{32\pi}{5} \text{ (куб.ед.)}$$