

Тема «Вычисление площадей с помощью интегралов»

Перечень вопросов, рассматриваемых в теме

- 1) Нахождение площади фигуры, ограниченной графиками функций с помощью определенного интеграла.
- 2) Нахождение площади криволинейной трапеции с помощью формулы Ньютона – Лейбница
- 3) Решение задач, с помощью формулы Ньютона – Лейбница

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

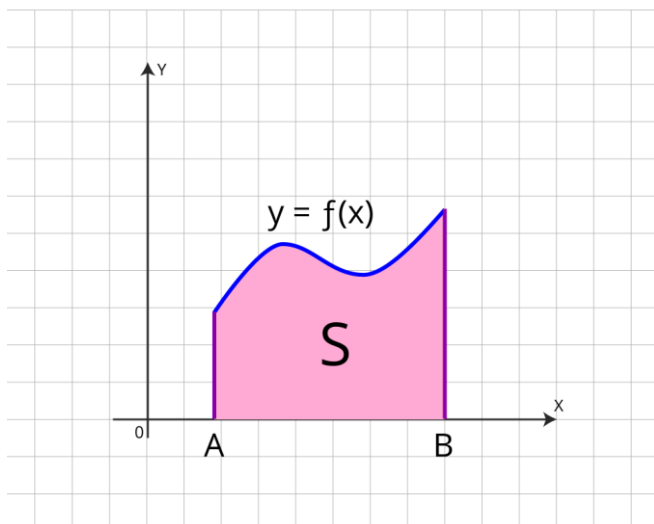
$$S = \int_a^b f(x)dx$$

Формула Ньютона – Лейбница

Теоретический материал для самостоятельного изучения

Криволинейной трапецией называется фигура, ограниченная графиком непрерывной и не меняющей на отрезке $[a;b]$ знака функции $f(x)$, прямыми $x=a$, $x=b$ и отрезком $[a;b]$.

Отрезок $[a;b]$ называют **основанием** этой криволинейной трапеции

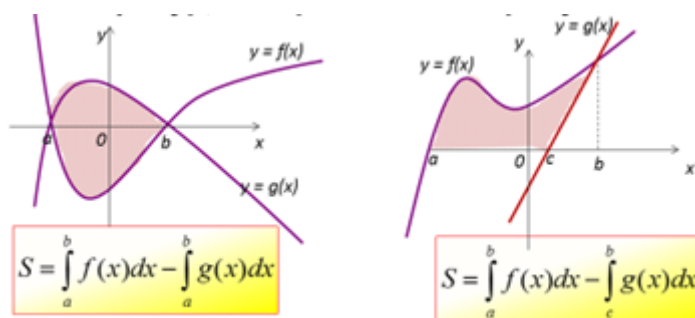


$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

$$S = \int_a^b f(x)dx$$

формула Ньютона – Лейбница

Если в задаче требуется вычислить площадь криволинейной трапеции, то ответ всегда будет положительный. Если требуется, используя чертеж, вычислить интеграл, то его значение может быть любым. (зависит от расположения криволинейной трапеции)



Примеры и разбор решения заданий тренировочного модуля

№1 Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x$, $y = 5 - x$, $x = 1$, $x = 2$, используя определенный интеграл.

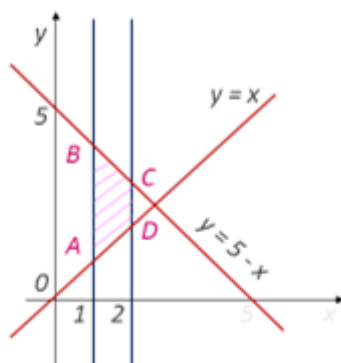
Решение. Воспользуемся формулой Ньютона-Лейбница.

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Сначала находим первообразную функцию $F(x)$. Далее подставляем значение верхнего предела в первообразную функцию: $F(b)$.

Затем подставляем значение нижнего предела в первообразную функцию: $F(a)$.

Рассчитываем разность $F(b) - F(a)$, это и будет ответ



$$\begin{aligned}
 S_{ABCD} &= \int_1^2 ((5-x) - x) dx = \\
 &= \int_1^2 (5-2x) dx = (5x - x^2) \Big|_1^2 = \\
 &= (5 \cdot 2 - 2^2) - (5 \cdot 1 - 1^2) = 2
 \end{aligned}$$

Ответ: 2

№2. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y=4-x^2$, $y=3x$, $y=0$ и находящейся в 1-й четверти.

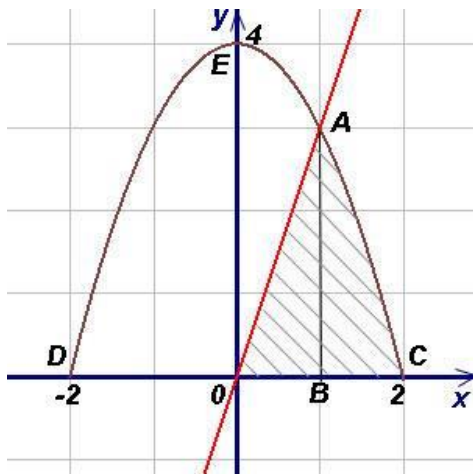
Решение: Воспользуемся формулой Ньютона-Лейбница.

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

Сначала находим первообразную функцию $F(x)$. Далее подставляем значение верхнего предела в первообразную функцию: $F(b)$.

Затем подставляем значение нижнего предела в первообразную функцию: $F(a)$.

Рассчитываем разность $F(b) - F(a)$, это и будет ответ.



Решение. $S = S_{OAB} + S_{ABC}$

$$\begin{cases} y = 4 - x^2 \\ y = 3x \end{cases}, x_1 = 1 \text{ и } x_2 = -4$$

$$\begin{cases} y = 4 - x^2 \\ y = 0 \end{cases}, x_1 = 2 \text{ и } x_2 = -2$$

$$\begin{aligned}
 s &= \int_0^1 3x \, dx + \int_1^2 (4 - x^2) \, dx = \\
 &= \frac{3}{2} x^2 \Big|_0^1 + \left(4x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_1^2 = \\
 &= \frac{3}{2} + \left(8 - \frac{8}{3} \right) - \left(4 - \frac{1}{3} \right) = \frac{19}{6} \text{ кв. ед.}
 \end{aligned}$$

№3. Найти площадь криволинейной трапеции $(x-1)^2$, ограниченной линиями $x=2$ и $x=1$, осью Ox

Решение:

Воспользуемся формулой Ньютона-Лейбница.

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

Сначала находим первообразную функцию $F(x)$. Далее подставляем значение верхнего предела в первообразную функцию: $F(b)$.

Затем подставляем значение нижнего предела в первообразную функцию: $F(a)$.

Рассчитываем разность $F(b) - F(a)$, это и будет ответ.

$$S = \int_1^2 (x-1)^2 dx = \frac{(2-1)^3}{3} - \frac{(1-1)^3}{3} = \frac{1}{3} - 0 = \frac{1}{3}$$