

Е.Г. Халзанова

**СБОРНИК ПРОФЕССИОНАЛЬНО-ОРИЕНТИРОВАННЫХ
ЗАДАЧ ПО МАТЕМАТИКЕ**

Улан-Удэ

2019

Министерство образования и науки Республики Бурятия
Государственное автономное профессиональное
образовательное учреждение Республики Бурятия
«Техникум строительства и городского хозяйства»

Е.Г.Халзанова

**СБОРНИК ПРОФЕССИОНАЛЬНО-ОРИЕНТИРОВАННЫХ
ЗАДАЧ ПО МАТЕМАТИКЕ**

Улан-Удэ

2019

УДК 377.031

ББК 22.1

X 17

Рассмотрено и одобрено к печати научно-методическим советом
ГАПОУ РБ «ТС и ГХ»

Рецензенты:

Д.А.Габеева

к.г.н., доцент, начальник довузовской подготовки ФГБОУ ВПО «БГУ»

А.Б.Атутова

преподаватель математики высшей категории ГБПОУ «БРИТ»

Составитель:

Е.Г.Халзанова

Сборник профессионально-ориентированных задач по математике.- Улан-Удэ, Изд-во
ФГБОУ ВО «БГСХА», 2019. – 54 с.

Настоящее учебно-методическое пособие «Сборник профессионально-ориентированных задач по математике» включает 90 задач практической, профессиональной направленности для профессий и специальностей СПО технического и строительного профилей, ответы и решения, краткий теоретический материал по основным темам курса математики.

Новизна, «авторская находка», заключается в интеграции двух основных целей в профессиональном и общем образовании: повышение качества математического образования, формирование профессиональных и общих компетенций. Пособие с задачами практической, профессиональной направленности окажет помощь студентам не только при получении профессии, но и при подготовке и сдаче ЕГЭ.

Оглавление

Введение	5
Раздел 1. Сборник задач	9
1.1. Целые, рациональные и дробные числа	9
1.2. Задачи с процентами	9
1.3. Задачи с графическим представлением данных. Анализ данных	10
1.4. Задачи, заданные табличным способом на нахождение наибольшего и наименьшего значения	14
1.5. Текстовые задачи (движение, работа, производительность)	17
1.6. Комбинированные задачи	18
1.7. Применение логарифмической и показательной функции в жизни и профессиональной деятельности	19
1.8. Тригонометрические функции в жизни и профессиональной деятельности человека	20
1.9. Применение производной в практической и профессиональной деятельности	20
1.10. Геометрические задачи	21
Раздел 2. Ответы, решения.	24
2.1. Целые, рациональные и дробные числа	24
2.2. Задачи с процентами	24
2.3. Задачи с графическим представлением данных. Анализ данных	25
2.4. Задачи, заданные табличным способом на нахождение наибольшего и наименьшего значения	26
2.5. Текстовые задачи	26
2.6. Комбинированные задачи	27
2.7. Применение логарифмической и показательной функции в жизни и профессиональной деятельности	28
2.8. Тригонометрические функции в жизни и профессиональной деятельности человека	29
2.9. Применение производной в практической и профессиональной деятельности	32
2.10. Геометрические задачи	36
Раздел 3. Справочный материал	46
Литература	51

Введение

Естественно - математическая подготовка является стержнем среднего профессионального образования по специальностям технического и строительного профилей и осуществлять ее необходимо в соответствии с требованиями федерального государственного образовательного стандарта общего образования и профессионального образования.

В профилированной программе по математике для среднего профессионального образования основной задачей ставится укрепление межпредметных связей курса математики и дисциплин / курсов общепрофессионального и профессионального циклов. В связи с этим рекомендуются установление прочных связей в работе преподавателя математики и дисциплин, согласование общих целей, задач, требований:

- ✓ Иллюстрация математических понятий и предложений примерами, взятыми из содержания предметов профессиональной подготовки;
- ✓ Использование на занятиях математики учебно-наглядных пособий, применяемых на предметах профессиональной подготовки;
- ✓ Составление и решение задач по математике с профессионально-ориентированным содержанием, это позволяет вовлечь в активную познавательную деятельность даже самых «слабых» учащихся, позволяет показать практическую ценность математических знаний.

Особенность профессионального образования и состоит в том, что интересы студентов в основном направлены на овладение профессии, и поэтому теоретический материал только тогда привлекает внимание будущих рабочих и специалистов среднего звена, когда они видят его практическую значимость для своей последующей производственной деятельности. Для достижения данной цели был составлен данный сборник. Акцентирование внимания студентов на возможности применять знания по математике не только в жизни, но и при изучении профессии, есть **сущность концепции** профессиональной направленности методической разработки.

Актуальность:

Среди учебных пособий, которые применяются для обучения математике, в основном преобладают учебники, сборники и задачники, ориентированные на учащихся школ, а для системы СПО таких пособий немного, и то в них недостаточно заданий по тем разделам математики, которые заложены в ЕГЭ. Тем более, что многие наши выпускники планируют продолжить обучение по выбранной специальности в ВУЗах.

Таким образом, нужен сборник, содержащий профессионально ориентированные

задачи, систематизированные по темам в соответствии с кодификаторами ЕГЭ. Такое пособие может стать существенным помощником студентам при получении профессии, при подготовке и сдаче ЕГЭ для продолжения обучения в учреждениях ВПО, т. е. содействовать непрерывному профессиональному образованию выпускников СПО.

Цель: повышение качества образования, применение математических знаний в решении задач повседневной практики и в дальнейшей профессиональной деятельности.

Задачи:

1. Пробуждение и развитие устойчивого интереса к математике;
2. Способствовать формированию общих, профессиональных и математических компетенций;
3. Расширение и углубление знаний по математике;
4. Формирование навыков работы с учебной литературой;
5. Подготовка студентов к ЕГЭ.

Использование данного методического продукта в работе способствует приобретать общие, математические и профессиональные компетенции:

1. Общие компетенции:

ОК 1. Понимать сущность и социальную значимость своей будущей профессии, проявлять к ней устойчивый интерес;

ОК 2. Организовывать собственную деятельность, исходя из цели и способов ее достижения, определенных руководителем;

ОК 3. Анализировать рабочую ситуацию, осуществлять текущий и итоговый контроль, оценку и коррекцию собственной деятельности, нести ответственность за результаты своей работы;

ОК 4. Осуществлять поиск информации, необходимый для эффективного выполнения профессиональных задач;

ОК 5. Использовать информационно-коммуникативные технологии в профессиональной деятельности;

2. Математические компетенции:

В стандартах среднего (полного) общего образования (базовый и профильный уровни) сформулированы следующие требования к уровню подготовки выпускников, которые принято использовать для характеристики уровня математической компетентности: “Использовать приобретенные знания и умения в практической деятельности и повседневной жизни для:

- практических расчетов по формулам, включая формулы, содержащие степени, радикалы, логарифмы и тригонометрические функции, используя при необходимости справочные материалы и простейшие вычислительные устройства;
- построения и исследования простейших математических моделей;
- описания и исследования с помощью функций реальных зависимостей, представления их графически;
- интерпретации графиков реальных процессов;
- решения геометрических, физических, экономических и других прикладных задач, в том числе задач на наибольшие и наименьшие значения с применением аппарата математического анализа;
- анализа реальных числовых данных, представленных в виде диаграмм, графиков, анализа информации статистического характера;
- исследования (моделирования) несложных практических ситуаций на основе изученных формул и свойств фигур; вычисления длин, площадей и объемов реальных объектов при решении практических задач, используя при необходимости справочники и вычислительные устройства”.

Организация работы по методическому продукту:

Материал из «Сборника профессионально-ориентированных задач» можно использовать при организации и проведении лабораторных, практических, аудиторных и внеаудиторных самостоятельных работ. На занятиях различного типа: изучения нового материала, формирования и совершенствования ЗУН, обобщения и систематизации знаний.

Методический продукт состоит из 3 разделов:

1. Сборник задач;
2. Ответы, комментарии, подробные решения наиболее трудных задач;
3. Справочный материал.

В первом разделе профессионально ориентированные задачи, систематизированные по темам в соответствии с кодификаторами ЕГЭ.

Во втором разделе ответы, комментарии и подробные решения наиболее трудных задач;

Для наиболее подготовленных студентов в сборнике есть задачи (обозначены « * »), решение которых носит исследовательский характер, задачи на составление не только математической модели, но и компьютерной и т.п.

Для любой организации работы преподавателем проводится работа по выбору заданий к нему.

В сборнике представлены задачи:

1. Задачи на выполнение арифметических действий (целые, рациональные и дробные числа) необходимых в практической и профессиональной деятельности.

2. Задачи с процентами.

Понятие процента. Нахождение процента от числа (величины), нахождения числа по его проценту, нахождение процента одного числа от другого. Пропорция. Прямая и обратная пропорциональность.

3. Задачи с графическим представлением данных. Анализ данных.

4. Задачи, заданные табличным способом на нахождение наибольшего и наименьшего значения.

Решение задач о транспортировке груза, о выборе тарифа, об аренде автомобиля, о расходах на ремонт автотранспорта, о покупке запчастей, о трех дорогах, о покупке стройматериалов.

5. Текстовые задачи.

Решение задач на движение, производительность.

6. Комбинированные задачи.

7. Текстовые задачи на моделирование процессов.

Решение задач на анализ явления, описываемого формулой функциональной зависимости (линейной, степенной, показательной, логарифмической, тригонометрической). Функциональные зависимости в профессионально-ориентированных задачах.

8. Применение производной в практической и профессиональной деятельности.

9. Геометрические задачи. Решение практических, профессионально - ориентированных задач по темам: «Многогранники. Формулы нахождения площадей поверхностей, объемов тел, площадей, периметров многоугольников», «Тела вращения. Формулы нахождения площадей поверхностей, объемов тел».

Раздел 1. Сборник задач

1.1. Целые, рациональные и дробные числа

1. 1 литр бензина АИ-92 стоит 33 рубля 62 коп. На заправочной станции водитель залил в бак 25 литров. Сколько рублей сдачи он должен получить с 1000 рублей?
2. В отделе «Автокосметика» ТЦ «За рулем» объявлена акция: при покупке 4 флаконов автошампуня пятый в подарок. Сколько флаконов автошампуня может купить автолюбитель на 1450 рублей, если 1 флакон стоит 132 рубля?
3. Для автомобиля полагается купить количество шин кратных 4. Автошина стоит 3200 рублей. У ООО «Шиномонтаж» 460 тыс. рублей. Какое наибольшее количество автомобилей одной модели будут обеспечены шинами?
4. На спидометре американского автомобиля скорость указывается в милях в час. Американская миля равна 1609 м. Какова скорость автомобиля в километрах в час, если спидометр показывает 75 миль в час? Ответ округлите до целого числа.
5. Спидометр автомобиля показывает скорость в милях в час. Какую скорость (в милях в час) показывает спидометр, если автомобиль движется со скоростью 40 км/ч? (Считайте, что 1 миля = 1,6 км.)
6. Таксист за месяц проехал 6000 км. Стоимость 1 л бензина 34 рубля. Средний расход бензина на 100 км составляет 9 л. Сколько рублей потратил таксист на бензин за этот месяц?
7. Основой для паркетных полов используют фанеру. 1 лист фанеры хвойной ФСФ стоит 778 рублей за лист площадью 3 м². Сколько стоит покупка фанеры для настила пола площадью 48 м²?
8. В магазине строительных материалов «Все для строительства и ремонта» проводится акция: четыре банки краски по цене трех. Какое наибольшее количество банок краски можно купить за 2500 рублей, если 1 банка стоит 210 рублей.
9. На автозаправке клиент отдал кассиру 1000 рублей и залил 32 литра бензина по цене 30 руб.50 коп. за литр. Сколько сдачи должен получить клиент? Ответ дайте в рублях.

1.2. Задачи с процентами

10. Цена на ремень ГРМ (ремень газораспределительного механизма) была повышена на 23% и составила 1845 рублей. Сколько рублей стоил ремень ГРМ до повышения цены?
11. В двух канистрах находится 90 л бензина. Если из первой канистры перелить во вторую 10% бензина, находящегося в первой канистре, то в обеих канистрах станет поровну. Сколько литров бензина было в каждой канистре?
12. Баллон антикоррозийного средства «WD-40» стоит 40 рублей. Какое наибольшее

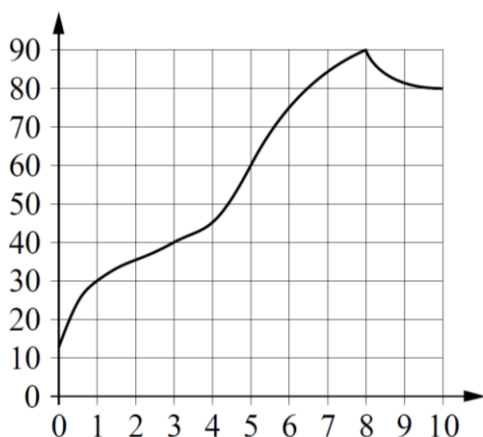
число таких баллонов можно будет купить на 500 рублей после повышения цены на 20%?

13. 1 литр масла ДВС стоил 500 рублей. После снижения цены стал стоить 380 рублей. На сколько процентов была снижена цена?
14. Мойка автобуса стоит 820 рублей. Стоимость мойки легкового автомобиля составляет 60% от стоимости мойки автобуса. Организации требуется помыть 2 автобуса и 6 легковых автомобилей. Сколько рублей организации потребуется для оплаты услуги?
15. В магазине автозапчастей находится 4500 наименований товара, причем 42% из них автомобильные аксессуары. Известно, что из аксессуаров 80% не является эмблемами. Сколько эмблем в магазине?
16. Магазин строительных материалов закупает у производителя монтажную пену по цене 200 рублей за штуку. Торговая наценка составляет 25%. Какое наибольшее количество баллонов с монтажной пеной можно купить на 2950 рублей?
17. Магазин автозапчастей закупает у производителя автогерметик по цене 70 рублей за тюбик. Торговая наценка составляет 20%. Какое наибольшее количество тюбиков автогерметика можно купить на 1800 рублей?
18. Цена теплоизоляционного материала - плиты пенополистирола ПСБ-С М-15 (2000x1000x50) стоит 310 рублей за штуку, а во время проведения торговой точкой распродажи стоит 264 рубля за 1 штуку. На сколько процентов была снижена цена на период проведения акции?
19. Лист гипсокартонный (ГКЛ) стандартный стоит 290 рублей, а ГКЛ влагостойкий стоит 420,5 рублей за 1 штуку. На сколько процентов ГКЛ влагостойкий дороже, чем стандартный?
20. К сезону цена на зимние шины выросла на 15 % и стоит 5 750 рублей за 1 штуку. Сколько стоил 1 комплект зимних шин до повышения цены?
21. К сезону цена на брус выросла на 12%. Сколько стоит 1 м³ бруса после повышения цены, если известно, что стоил 1 м³ бруса 5 900 рублей?
22. Кровельный материал необходимо приобретать с расчетом на «нахлест», составляющий 2% от общей площади. Сколько листов кровельного материала понадобится для кровли крыши гаража площадью 120 м², если 1 лист имеет площадь 2,5 м²?

1.3. Задачи с графическим представлением данных. Анализ данных

23. На графике показано изменение температуры в процессе разогрева двигателя легкового автомобиля. На горизонтальной оси отмечено время в минутах, прошедшее с момента запуска автомобиля, на вертикальной оси – температура двигателя в

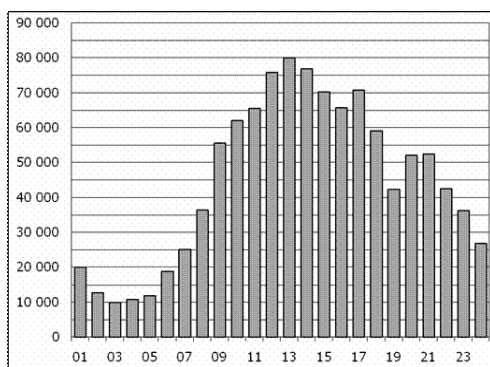
градусах Цельсия.



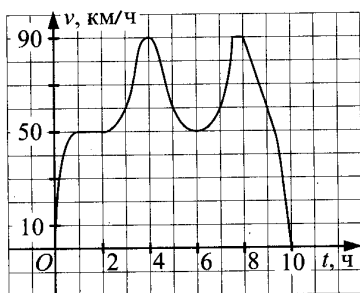
Пользуясь графиком, поставьте в соответствие каждому интервалу времени характеристику процесса разогрева двигателя на этом интервале.

<i>Интервалы времени</i>	<i>Характеристика процесса</i>
А) 0-2 мин.	1) Температура росла медленнее всего
Б) 2-4 мин.	2) Температура падала
В) 4-6 мин.	3) Температура росла быстрее всего
Г) 8-10 мин.	4) Температура не превышала 40°C

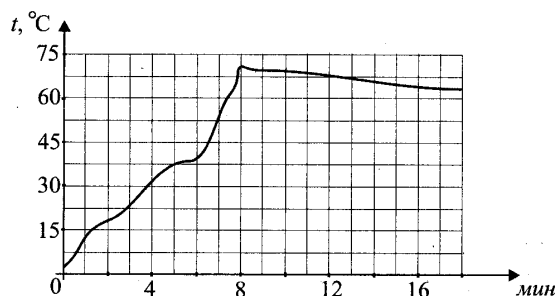
24. На диаграмме показано количество посетителей сайта для подбора автозапчастей и аксессуаров для автомобиля «Auto.ru» в течение каждого часа 8 декабря 2014 года. По горизонтали указывается часы, по вертикали — количество посетителей сайта за данный час. Определите по диаграмме, каким было наименьшее количество посетителей в час с 11:00 до 17:00 в этот день на сайте.



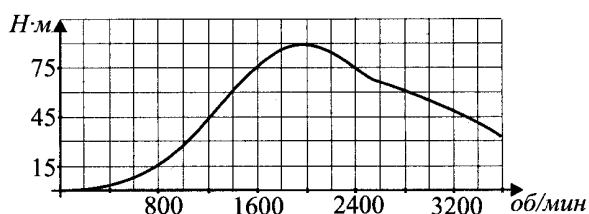
25. На графике показано изменение скорости движения автомобиля в зависимости от времени. На оси абсцисс отмечается время движения в часах, на оси ординат — скорость в километрах в час. Сколько часов автомобиль двигался со скоростью не менее 60 км/ч?



26. На графике показан процесс разогрева двигателя легкового автомобиля при температуре окружающего воздуха 3°C . На оси абсцисс откладывается время в минутах, прошедшее от запуска двигателя, на оси ординат – температура двигателя в градусах Цельсия. Когда температура достигает определенного значения, включается вентилятор, охлаждающий двигатель, и температура начинает понижаться. Определите по графику, сколько минут прошло с момента запуска двигателя до включения вентилятора?

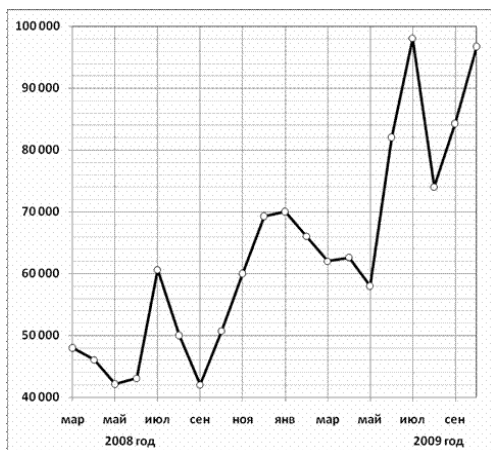


27. На графике изображена зависимость крутящего момента двигателя от числа оборотов в минуту. На оси абсцисс откладывается число оборотов в минуту, на оси ординат – крутящий момент в Н·м. Скорость автомобиля (в км/ч) приближенно выражается формулой $v=0,03n$, где n – число оборотов двигателя в минуту. С какой наименьшей скоростью должен двигаться автомобиль, чтобы крутящий момент был не меньше 75 Н·м? Ответ дайте в километрах в час.

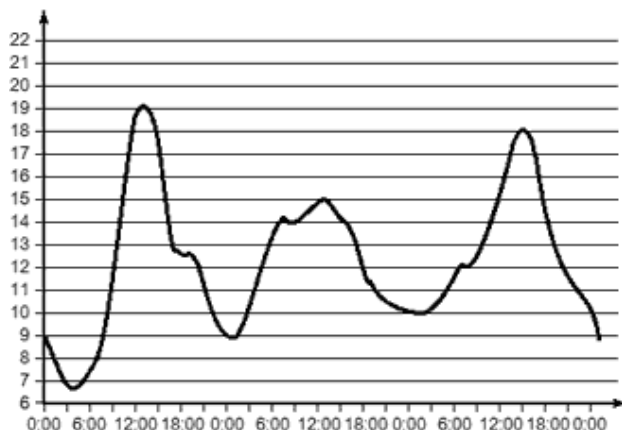


28. На рисунке жирными точками показано количество запросов со словами «ремонт автомобиля», сделанных на поисковом сайте Yandex.ru во все месяцы с марта 2008 по октябрь 2009 года. По горизонтали указываются месяцы, по вертикали — количество запросов за данный месяц. Для наглядности жирные точки на рисунке соединены линией. Определите по рисунку наибольшее месячное количество запросов со

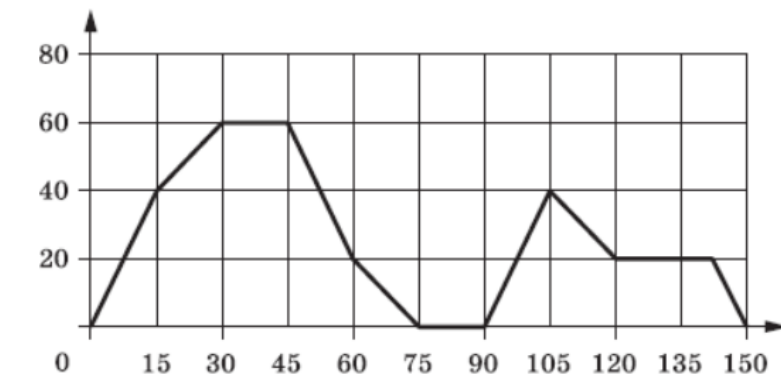
словами «ремонт автомобиля» в период с сентября 2008 по май 2009 года.



29. На графике показано изменение температуры воздуха в гараже на протяжении трех суток, начиная с 0 часов вторника. На оси абсцисс отмечается время суток в часах, на оси ординат — значение температуры в градусах. Определите по графику наименьшую температуру воздуха в ночь со среды на четверг.



30. На графике изображена зависимость скорости движения легкового автомобиля от времени. На вертикальной оси отмечена скорость легкового автомобиля в км/ч, на горизонтальной — время в секундах, прошедшее с начала движения автомобиля. Пользуясь графиком, поставьте в соответствие каждому интервалу времени характеристику движения автомобиля на этом интервале.



Интервалы времени	Характеристики
А) 0-30 с	1) Скорость автомобиля сначала увеличивалась, а потом уменьшалась
Б) 60-90 с	2) Автомобиль более 15 секунд ехал с постоянной скоростью
В) 90-120 с	3) Автомобиль сделал остановку длительностью 15 секунд
Г) 120-150 с	4) Скорость автомобиля увеличивалась на всём интервале

В таблице под каждой буквой укажите соответствующий номер

А	Б	В	Г

1.4. Задачи, заданные табличным способом на нахождение наибольшего и наименьшего значения

31. Семья из трех человек планирует поехать из Улан-Удэ в Иркутск. Можно ехать поездом, а можно — на своей машине. Билет на поезд на одного человека стоит 930 рублей. Автомобиль расходует 10 литров бензина на 100 километров пути, расстояние по шоссе равно 500 км, а цена бензина АИ-92 равна 34 рубля за литр. Сколько рублей придется заплатить за наиболее дешевую поездку на троих?
32. Клиент хочет арендовать автомобиль на сутки для поездки протяженностью 600 км. В таблице приведены характеристики трех автомобилей и стоимость их аренды. Помимо аренды клиент обязан оплатить топливо для автомобиля на всю поездку. Какую сумму в рублях заплатит клиент за аренду и топливо, если выберет самый дешевый вариант?

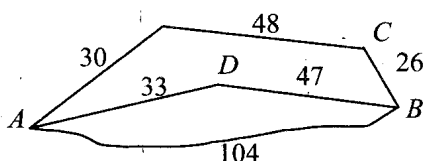
Автомобиль	Топливо	Расход топлива (л на 100 км)	Арендная плата (руб. за 1 сутки)
А	Дизельное	4	3600
Б	Бензин	6	3000
В	Газ	10	3400

Цена дизельного топлива — 16 рублей за литр, бензина — 18 рублей за литр, газа — 15 рублей за литр.

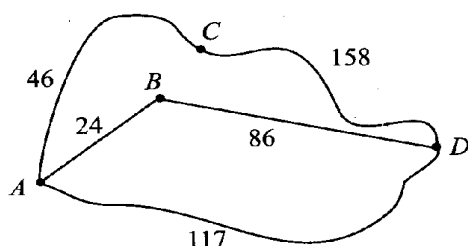
33. Для транспортировки 45 тонн груза на 1300 км можно использовать одного из трех перевозчиков. Стоимость перевозки и грузоподъемность автомобилей для каждого перевозчика указана в таблице. Сколько рублей придется заплатить за самую дешевую перевозку за один рейс?

Перевозчик	Стоимость перевозки одним автомобилем (руб. на 100 км)	Грузоподъемность автомобилей (тонн)
А	3200	3,5
Б	4100	5
В	9500	12

34. Из пункта А в пункт В ведут три дороги (см. рис., расстояния указаны в километрах). Через пункт С едет автобус со средней скоростью 65 км/ч, через пункт D едет грузовик со средней скоростью 60 км/ч, и по третьей дороге без промежуточных пунктов едет легковой автомобиль со средней скоростью 80 км/ч. Все три машины выехали из пункта А одновременно. Найдите время в пути (в часах) автомашины, пришедшей позже всех.



35. Из пункта А в пункт В ведут три дороги (см. рис.). Через пункт В едет трактор со средней скоростью 44 км/ч, через пункт С едет легковой автомобиль со средней скоростью 68 км/ч. Третья дорога без промежуточных пунктов, и по ней движется автобус со средней скоростью 45 км/ч. Все три автомобиля одновременно выехали из пункта А. Какой автомобиль добрался до пункта D раньше других? В ответе укажите, сколько часов он находился в дороге.



36. Для строительства помещения СТО фирме нужно приобрести 74 кубометра пенобетона у одного из трех поставщиков. Цены и условия доставки приведены в таблице. Сколько рублей придется заплатить за самую дешевую покупку с доставкой?

Поставщик	Стоимость пенобетона (руб. за за 1 м ³)	Стоимость доставки	Дополнительные условия
А	2750	4900 руб.	
Б	3100	5900 руб.	При заказе на сумму больше 150000 руб. доставка бесплатно
В	2780	3900 руб.	При заказе более 75 м ³ доставка бесплатно

37. Для строительства гаража можно использовать один из двух типов фундамента: бетонный или фундамент из пеноблоков. Для фундамента из пеноблоков необходимо 4,5 кубометра пеноблоков и 2 мешка цемента. Для бетонного фундамента необходимо 3 тонны щебня и 30 мешков цемента. Кубометр пеноблока стоит 2100 рублей, щебень стоит 750 рублей за тонну, а мешок цемента стоит 250 рублей. Сколько рублей будет стоить материал, если выбрать наиболее дешёвый вариант?
38. Строительной фирме нужно приобрести 60 кубометров строительного бруса у одного из трех поставщиков. Какова наименьшая стоимость такой покупки с доставкой (в рублях)? Цены и условия доставки приведены в таблице.

Поставщик	Цена бруса (руб. за 1 м ³)	Стоимость доставки	Дополнительные условия
А	3600	10600 руб.	
Б	4500	8600 руб.	При заказе на сумму больше 150000 руб. доставка бесплатно
В	3700	8600 руб.	При заказе на сумму больше 200000 руб. доставка бесплатно

39. На складе стройматериалов имеются товары, количество и цена которых указаны в таблице:

Наименование товара	Количество	Цена
Кирпич красный	50 000 шт.	2,5 руб./шт.
Кирпич силикатный	40 000 шт.	2,0 руб./шт.
Цемент	180 т	2 600 руб./т
Шифер	5 000 листов	180 руб./л
Профнастил	1 000 пог. м	300 руб./пог.м

Строительный трест планировал закупить 100 тыс. шт. кирпича и перечислил складу 250 тыс. рублей. Какую сумму (в тыс. рублей) склад останется должен тресту после отгрузки всего имеющегося на складе кирпича?

40. В таблице даны тарифы на услуги трёх фирм такси. Предполагается поездка длительностью 40 минут. Нужно выбрать фирму, в которой заказ будет стоить дешевле всего. Сколько рублей будет стоить этот заказ?

Фирма такси	Подача машины	Продолжительность и стоимость минимальной поездки	Стоимость 1 минуты сверх продолжительности минимальной поездки (в руб.)
«С ветерком»	100 рублей	Нет	9
«В путь»	Бесплатно	15мин – 150 руб.	11
«В дорогу»	50 рублей	15 мин – 150 руб.	10

1.5. Текстовые задачи (движение, работа, производительность)

41. Ремонт одного и того же автомобиля Виктор и Алексей делают за 8 дней, как и Андрей вместе с Виктором, при этом Алексей с Андреем могут выполнить этот ремонт за 12 дней. Сколько дней длиться ремонт, если все три автомеханика будут работать одновременно?
42. Один автомеханик может выполнить заказ за 12 часов, второй – за 15 часов, а третий – за 20 часов. За сколько часов три автомеханика выполнят заказ работая совместно?
43. На изготовление 27 деталей первый автослесарь тратит на 6 часов меньше, чем второй автослесарь на изготовлении 54 таких же деталей. Известно, что первый автослесарь за час делает на 3 детали больше, чем второй. Сколько деталей в час делает второй автослесарь?
44. Два каменщика могут выложить стену за 6 часов. Через три часа после начала работы второй каменщик получил травму и ушёл, после чего первый закончил работу за 4 часа. Сколько часов потребовалось бы для того, чтобы выложить стену, второму каменщику, если бы он не получил травму и работал один?
45. Автомобилист проехал расстояние между двумя городами за 3 дня. В первый день он проехал $\frac{1}{4}$ всего пути и ещё 40 км, во второй день он проехал $\frac{1}{3}$ всего пути и ещё 30 км, а в третий день он проехал $\frac{17}{60}$ всего пути и оставшиеся 45 км. Найдите расстояние между городами (в км).
46. Первые два часа автомобиль ехал со скоростью 95 км/ч, следующие два часа — со скоростью 45 км/ч, а затем один час — со скоростью 40 км/ч. Найдите среднюю скорость автомобиля на протяжении всего пути. Ответ дайте в км/ч.
47. Автомобиль ехал 1,5 часа со скоростью 40 км/ч, 2,5 часа – со скоростью 60 км/ч, оставшуюся часть пути – со скоростью 75 км/ч. Определите среднюю скорость автомобиля, если всего он потратил 5 часов. Ответ укажите в км/ч.
48. Из пункта А в пункт В одновременно выехали два автомобиля. Первый проехал с постоянной скоростью весь путь. Второй проехал первую половину пути со скоростью, меньшей скорости первого на 12 км/ч, а вторую половину пути — со скоростью 72 км/ч, в результате чего прибыл в пункт В одновременно с первым автомобилем. Найдите скорость первого автомобиля, если известно, что она больше 45 км/ч.
49. Из пункта А в пункт В, расстояние между которыми 50 км, одновременно выехали автомобилист и велосипедист. Известно, что в час автомобилист проезжает на 30 км

больше, чем велосипедист. Определите скорость велосипедиста, если известно, что он прибыл в пункт В на 1 час 30 минут позже автомобилиста. Ответ дайте в км/ч.

50. На АЗС первый насос наполняет емкость за 30 минут, второй – за 48 минут, а третий – за 1 час 20 минут. За сколько минут наполнят емкость три насоса, работая одновременно?

51. Машинами перевозят груз, ежедневно увеличивая норму перевозки на одно и то же число тонн. Известно, что в первый день перевезено 27 тонн груза. Определите, сколько тонн груза было перевезено за 6 дней, если в шестой день перевезли 507 тонн.

1.6. Комбинированные задачи

52. При температуре 0°C выхлопная труба легкового автомобиля имеет длину $l_0 = 3,25$ метров. При возрастании температуры происходит тепловое расширение трубы, и его длина, выраженная в метрах, меняется по закону: $l(t^{\circ}) = l_0 \cdot (1 + a \cdot t^{\circ})$, где $a = 1,2 \cdot 10^{-5} (^{\circ}\text{C})^{-1}$ — коэффициент теплового расширения, t° — температура (в градусах Цельсия). При какой температуре рельс удлинится на 3 мм? Ответ выразите в градусах Цельсия.

53. Коэффициент полезного действия (КПД) двигателя (ДВС) определяется по формуле:

$$\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1} \cdot 100\%$$
, где T_1 — температура нагревателя (в градусах Кельвина), T_2 — температура холодильника (в градусах Кельвина). При каком наименьшем значении температуры нагревателя T_1 КПД этого двигателя будет не меньше 70%, если температура холодильника $T_2 = 150$?

54. Коэффициент полезного действия (КПД) некоторого двигателя определяется по

формуле:
$$\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1} \cdot 100\%$$
, где T_1 — температура нагревателя (в градусах Кельвина), T_2 — температура холодильника (в градусах Кельвина). При какой минимальной температуре нагревателя T_1 КПД этого двигателя будет не меньше 20%, если температура холодильника $T_2 = 310 \text{ K}$? Ответ выразите в градусах Кельвина.

55. В боковой стенке высокого цилиндрического бака у самого дна закреплен кран. После его открытия вода начинает вытекать из бака, при этом высота столба воды в нем,

выраженная в метрах, меняется по закону:
$$H(t) = H_0 - \sqrt{2gH_0}kt + \frac{g}{2}k^2t^2$$
, где t —

время в секундах, прошедшее с момента открытия крана, $H_0 = 20 \text{ м}$ — начальная высота столба воды, $k = 1/50$ — отношение площадей поперечных сечений крана и бака, а g — ускорение свободного падения (считайте $g = 10 \text{ м/с}^2$). Через сколько секунд после открытия крана в баке останется четверть первоначального объема воды?

56. Для обогрева помещения, температура в котором $T_{\text{п}}=25^{\circ}\text{C}$, через радиатор отопления

пропускают горячую воду с начальной температурой $T_B = 65^{\circ}\text{C}$. Расход проходящей через трубу воды $m = 0,2$ кг/с. Проходя по трубе расстояние x (м), вода охлаждается до температуры $T(^{\circ}\text{C})$, причем $x = \alpha \frac{cm}{\gamma} \log_2 \frac{T_B - T_n}{T - T_n}$ (м), где $c = 4200 \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot ^{\circ}\text{C}}$ - теплоемкость воды, $\gamma = 21 \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot ^{\circ}\text{C}}$ - коэффициент теплообмена, а $\alpha = 0,7$ - постоянная. До какой температуры (градусах по Цельсия) охладится вода, если длина трубы 28 м?

57. Трактор тащит сани с силой $F = 72 \text{ кН}$, направленной под острым углом α к горизонту. Работа трактора (в килоджоулях) на участке длиной $S = 40 \text{ м}$ вычисляется по формуле $A = FS \cos \alpha$. При каком максимальном угле α (в градусах), совершенная работа будет не менее 1440 кДж?

58. * Выбор упорного шарикоподшипника, работающего при нормальной температуре и со спокойной нагрузкой, производится по следующей формуле: $C = A \cdot (n \cdot h)^{0,3}$. Выбрать подшипник, если $A = 1000$ кг, $n = 700$ об/мин, $h = 10000$ часов. Где C – коэффициент работоспособности подшипника, определяется из таблиц подшипников в зависимости от типа и номера выбранного подшипника, A – осевая нагрузка (кг), n – число оборотов, h – долговечность подшипника (ч)

Таблица (выдержка из таблицы упорных подшипников)

Условное обозначение подшипника	Габариты подшипника			Коэффициент работоспособности C	Допускаемая статистическая нагрузка кГ	Вес подшипника кГ
	d, мм	D, мм	H, мм			
8215	75	110	27	92000	12000	0,86
8216+	80	115	28	96000	12600	0,95
8217	85	125	31	116000	16800	1,25
8218+	90	135	35	140000	19500	1,77
8220	100	150	38	170000	23500	2,4

1.7. Применение логарифмической и показательной функции в жизни и профессиональной деятельности

59. *Необходимо вычислить стоимость оборудования станции технического обслуживания (СТО) через 5 лет, если его первоначальная стоимость $= 4,68 \cdot 10^5$ р, а ежегодный процент амортизации $= 5,7\%$

60. *Стоимость оборудования автомастерской равна 500 тыс. р. Известно, что через 10 лет стоимость этого оборудования вследствие амортизации будет равна 200 тыс. р. Найдите процент ежегодной амортизации оборудования.

61. *Количество автомобилей в городе возрастает ежегодно на 3%. Через сколько лет количество автомобилей в этом городе увеличиться в 1,5 раза?
62. *Какова была численность населения города 10 лет тому назад, если в настоящее время в городе проживает 300 тыс. человек, а ежегодный прирост составляет 3,5%?

1.8. Тригонометрические функции в жизни и профессиональной деятельности человека

63. *Составить математическую и компьютерную модель теории «трех биоритмов». Используя тригонометрические функции с помощью программы MSExcel разработать компьютерную модель, строящую графики биоритмов человека в зависимости от его даты рождения.
- Физический цикл равен 23 дням. Он определяет энергию человека, его силу, выносливость, координацию движения.
 - Эмоциональный цикл равен 28 дням и обуславливает состояние нервной системы и настроение.
 - Интеллектуальный цикл (33 дня) определяет творческую способность личности.
- Ответить на вопросы: 1) Влияет ли физическое (эмоциональное, интеллектуальное) состояние на управление автотранспортом? 2) Какие меры предупреждения ДТП вы можете порекомендовать? 3) Можно ли с помощью модели «Трех биоритмов» планировать важные дела?

1.9. Применение производной в практической и профессиональной деятельности

Транспорт.

64. *Каким должен быть угол примыкания α (рис. 1) дороги СЕ к автомагистрали АВ, чтобы затраты времени на перевозки по маршруту АЕС были наименьшими, если скорость движения автомобилей по магистрали планируется равной V_m , а по подъездной дороге – V_a ($V_m > V_a$).

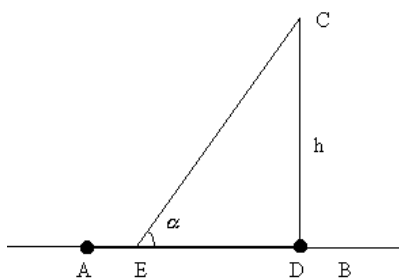


Рис. 1

65. Закон прямолинейного движения задан уравнением $s = -t^3 + 9t^2 - 24t - 8$. Найти максимальную скорость движения тела (s - в метрах, t - в секундах).

66. Тело движется по закону $s(t) = 18t^2 + 10t - 2t^3$ (s- в метрах, t-в секундах). Найдите максимальную скорость движения тела.
67. Материальная точка движется по закону $s(t) = 12t^2 - \frac{2}{3}t^3$. В какой момент времени t скорость точки будет наибольшей.
68. Требуется изготовить поддон для слива отработанного ГСМ - открытую сверху коробку, вырезая по углам равные квадратики. Прямоугольный лист жести имеет длину 64 см и ширину 40 см. Каковы должны быть стороны вырезаемых квадратиков, чтобы вместимость поддона была максимальной.
69. Каким должно быть отношение диаметра основания к высоте закрытой цилиндрической цистерны, чтобы при заданном объеме на изготовление цистерны шло как можно меньше материала?

Строительство.

70. *Вывести формулу для определения наименьшей длины стрелы автомобильного крана, с помощью которого можно построить здание высоты H и ширины $2l$ с плоской крышей (рис.2).

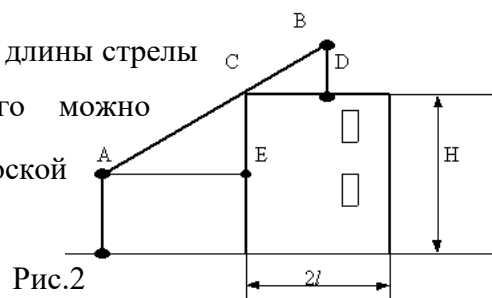


Рис.2

71. *На лесопильных рамах (они предназначены для продольного пиления) бревна часто распиливают на квадратный брус и четыре доски (рис.3) с максимально возможной площадью поперечного сечения. Какой должна быть расстановка пил для такой распиловки?

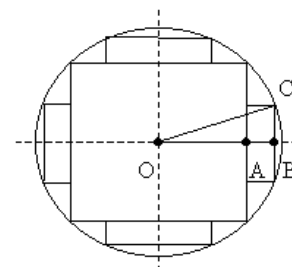


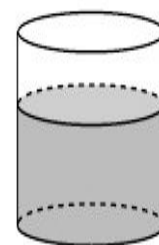
Рис.3

72. *Прочность балки прямоугольного сечения пропорциональна произведению ее ширины на квадрат высоты. Какое сечение должна иметь балка, вытесанная из цилиндрического бревна радиуса R, чтобы ее прочность была наибольшей?
73. Огораживают автостоянку прямоугольной формы площадью 2500 м^2 . Каковы должны быть ее размеры, чтобы на забор ушло наименьшее количество материала.

1.10. Геометрические задачи

74. Бак, имеющий форму прямоугольного параллелепипеда, доверху заполнен бензином. Длина бака 3 м, ширина 1,5 м, высота 1,2 м (размеры внутренние). Плотность бензина 710 кг/м^3 . На сколько рабочих дней хватит этого бензина для заправки автомобиля ГАЗ-53, если средний расход бензина автомобилем за рабочий день 95 кг?

75. Кузов тракторного прицепа имеет усеченной пирамиды и размеры: сверху 3,5 м х 2,6 м, понизу 2,9 м х 1,1 м. Найдите вместимость, если высота прицепа 1,2 м.
76. Надо изготовить цилиндрическую цистерну для масла, закрытую сверху. Диаметр ее основания 450 см, высота 220 см. Сколько листов листовой стали размером 100 см х 600 см пойдет на ее изготовление? На швы и обрезки добавить 12% площади.
77. Найти вес железной цилиндрической трубки, внутренний диаметр которой равен 17 см, а внешний диаметр равен 18 см, а длина равна 74 см. Плотность железа 7,9 г/см³.
78. На цилиндрический барабан подъемной машины, диаметр которого 750 мм, а ширина 350 мм, наматывается стальной трос толщиной 20 мм. Сколько метров каната помещается в один ряд на поверхности барабана?
79. Диаметр цилиндра паровой машины равен 330 мм, ход поршня 406 мм. Найти объем рабочей части цилиндра с точностью до 0,1 дм³.
80. 100 кубических сантиметров масла, вылитые на поверхность воды образовали пленку в форме круга диаметром 18 м. Определить толщину пленки.
81. В цилиндрическую цистерну емкостью 12 т налито дизельное топливо. Сколько дизельного топлива содержится в цистерне, если ее высота равна 6 м, а уровень горючего 2 м?
82. Сколько бочек высотой 1,5 м и диаметром 0,8 м нужно, чтобы разлить в них содержимое цистерны длиной 4,5 м и диаметром 1,6 м?
83. Вибросито СО – 3 для процеживания окрасочных составов имеет форму конуса. Боковая поверхность вдвое больше площади основания. Определить вместимость вибросита, если радиус основания 20 см.
84. В цилиндрическом сосуде уровень жидкости достигает 16 см. На какой высоте будет находиться уровень жидкости, если её перелить во второй цилиндрический сосуд, диаметр основания которого в 2 раза больше диаметра основания первого? Ответ выразите в см.



85. Рассчитайте расход масляного колера, идущего на покраску помещения длиной 5 м, шириной 4 м и высотой 3 м, если на окраску 1 м² требуется 0,2 кг колера(окна и двери занимают 12% площади поверхности).
86. Сколько строительного кирпича и раствора потребуется для постройки стены длиной 12 м, толщиной 0,5 м и высотой 2,5 м, если в 1 м³ кирпичной кладки содержится 400 шт. кирпича, а потребность в растворе составляет 0,2 объема кладки.
87. Сколько можно изготовить баков размерами 1,5*2*1 из куска жести размером 20*100 м?(припуски на швы составляют 2% от площади поверхности бака)

- 88.** Нужно оклеить обоями комнату, длина которой 6 м, ширина 4 м, высота 3 м, площадь дверей и окон составляет $\frac{1}{5}$ всей площади стен. Сколько потребуется рулонов обоев для оклейки, если длина рулона 12 м, а ширина 50 см?
- Б) Сколько можно изготовить ящиков под рассаду длиной 50 см, шириной 30 см, высотой 20 см из 20 досок размером 5м*0,3м.
- 89.** Сколько нужно керамической плитки размером 300*200 мм для облицовки кухни длиной 6 м, шириной 3 м, высотой 3 м, площадь окон и дверей составляет 15% от площади стен?
- 90.** *Создать математическую и компьютерную модель для расчета материала для строительства здания из бруса. Ситуация: продается брус, длина, ширина и высота которого известна. Необходимо провести исследование, которое позволит автоматически определить необходимое количество бруса для строительства любого здания. Размеры здания задаются высотой (h), длиной (a) и шириной (b). При этом учесть, что 15 % площади стен комнаты занимают окна и двери, а при распиловке 3 процента бруса уходит в опилки и обрезки.
- 91.** * Ответить на вопросы:
- 1) Какие фигуры называются фигурами постоянной ширины?
 - 2) Какими геометрическими характеристиками обладают фигуры постоянной ширины: круг, треугольник Рело?
 - 3) Найдите технические области применения этих фигур.

Раздел 2. Ответы, решения.

2.1. Целые, рациональные и дробные числа

1. Решение: 33 рубля 62 коп. = 33,62 рублей.

Стоимость покупки составила $25 \cdot 33,62 = 840,5$ рублей.

Следовательно, водитель должен получить $1000 - 840,5 = 159,5$ рублей сдачи.

Ответ: 159 рублей 50 коп.

2. 12 флаконов.

3. Решение: $3200 \cdot 4 = 12800$ (р.) – требуется на 1 а/м

$$460000 : 12800 = 35,94$$

Ответ: на 35 автомобилей.

4. 121 км/ч

5. 25.

6. Решение: 1) $6000 : 100 = 60$ – столько раз 100 км входит в 6000 км.

2) $60 \cdot 9 = 540$ (л) – столько бензина истратил за месяц

3) $540 \cdot 34 = 18360$ (руб) – потратил

Ответ: 18360 рублей.

7. 12448 рублей.

8. 14.

9. 24.

2.2. Задачи с процентами

10. 1500 рублей.

11. 50 л и 40 л.

12. 10 штук.

13. на 24 %.

14. 4592 рубля.

15. 378.

16. 11

17. 21

18. 15%

19. 45%.

20. 20000 рублей.

21. 6608 рублей.

22. Решение: найдем 2% от 120. $120 : 100 \cdot 2 = 2,4$

$$120 + 2,4 = 124,4$$

$$124,4:2,5=49,76$$

Ответ: 50 листов.

2.3. Задачи с графическим представлением данных. Анализ данных

- 23.** Решение: Проверяется умение читать графики. В интервале 0 - 2 минуты температура не превышала 40 градусов, верен вариант ответа 4. Падала температура в интервале от 8 до 10 градусов. То есть к букве Г подходит вариант 2. Где же температура росла быстрее - от 2 до 4 или от 4 до 6? А там, где график круче идёт наверх, таи и быстрее. Получается вот что:

А	Б	В	Г
4	1	3	2

Ответ: 4132

24. 104000 посетителей.

25. 4 часа.

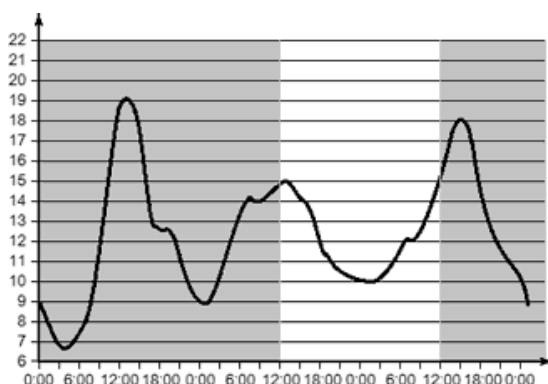
26. 8.

27. 48.

28. 70000.

- 29.** Решение: Это непрерывный график. Для решения задачи необходимо отбросить всю лишнюю информацию, проведя вертикальные границы. Проблема в том, что фраза «ночь со среды на четверг» не дает четких границ. Попробуем установить эти границы. Так, 12:00 среды — это точно еще не ночь, а 12:00 четверга — это уже не ночь. Чем ближе мы подходим к указанным моментам, тем выше температура. Очевидно, в этой задаче 12:00 среды и 12:00

четверга могут служить вертикальными границами.



Проведем их и получим следующую картинку:

То, что закрашено серым цветом, нас не интересует. На оставшейся части графика минимальная температура равна 10 °С. Это значение достигается как раз ночью — примерно в 0:00 — и поэтому является ответом.

Ответ: 10

- 30.** Решение: Для наглядности выделим каждый период (см. рисунок ниже). Первая характеристика звучит так - "Скорость автомобиля сначала увеличивалась, а потом уменьшалась". Взглянув на график, мы увидим, что только на интервале 90-120 с, т.е. В такое было. Значит, В - 1.

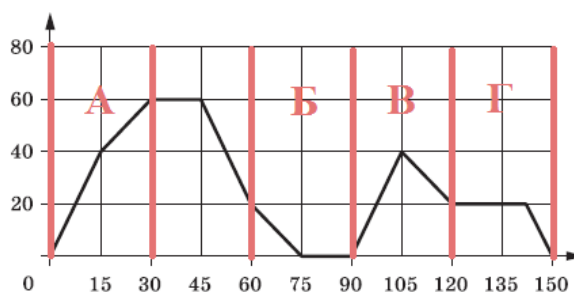
Вторая характеристика - "Автомобиль больше 15 секунд ехал с постоянной скоростью". На первый взгляд можно предположить два интервала - Б и Г. Но если посмотреть внимательно на интервал Б, то мы увидим, что там автомобиль вообще стоял и при том, ровно 15 секунд, но никак не более. Значит

Г - 2.

А вот для третьей характеристики как раз и подходит интервал под пунктом Б, так как именно там автомобиль сделал остановку.

Ну и на интервале А скорость автомобиля увеличивалась на протяжении всего интервала.

Ответ: 4312.



2.4. Задачи, заданные табличным способом на нахождение наибольшего и наименьшего значения

31. 1700 рублей.
32. 3648 рублей.
33. 479700.
34. 1,6.
35. 2,5.
36. 208400.
37. 9750 рублей.
38. 222000 рублей.
39. 45 тыс. рублей.
40. 425 рублей.

2.5. Текстовые задачи

41. 6 дней.
42. 5 часов.
43. 9
44. 24.
45. 862,5.
46. 64 км/ч.
47. 57 км/ч.
48. 48 км/ч.
49. 20 км/ч.
50. 15 минут.
51. 1602.

2.6. Комбинированные задачи

52. Решение:

В задаче присутствуют сразу три единицы измерения: метры, миллиметры и градусы Цельсия. Переведем миллиметры в метры: $3 \text{ мм} = 3 \cdot 10^{-3} \text{ м}$. Это сделано для того, чтобы все длины были в единой системе измерения — метрах.

$$3,25 + 3 \cdot 10^{-3} = 3,25 \cdot (1 + 1,2 \cdot 10^{-5} \cdot t);$$

$$3,25 + 3 \cdot 10^{-3} = 3,25 + 3,9 \cdot 10^{-5} \cdot t;$$

$$3 \cdot 10^{-3} = 3,9 \cdot 10^{-5} \cdot t;$$

$$3 = 3,9 \cdot 10^{-2} \cdot t;$$

$$1 = 1,3 \cdot 10^{-2} \cdot t;$$

$$t = 100 : 1,3 \approx 76,92$$

Ответ: при $t \approx 76,9^\circ\text{C}$

53. Решение: Перепишем формулу, избавившись от дроби: $\eta \cdot T_1 = (T_1 - T_2) \cdot 100$. В этой формуле известны КПД $\eta = 70$ и температура холодильника $T_2 = 150$. Подставляем — получаем уравнение относительно T_1 :

$$70 \cdot T_1 = (T_1 - 150) \cdot 100;$$

$$70 \cdot T_1 = 100 \cdot T_1 - 15\,000;$$

$$-30 \cdot T_1 = -15\,000;$$

$$T_1 = 500.$$

Ответ: 500 К

54. 387,5 К.

55. Решение: Для начала выясним, чему равно искомое $H(t)$. По условию, в баке должна остаться четверть первоначального объема воды. Поэтому $H(t) = (1/4) \cdot 20 = 5 \text{ м}$.

Теперь, когда все параметры известны, подставим числа в функцию. Чтобы не усложнять выкладки, заметим следующее:

$$\sqrt{2gH_0} = \sqrt{2 \cdot 10 \cdot 20} = \sqrt{400} = 20$$

Таким образом, вместо корня можно смело писать число 20. Имеем:

$$5 = 20 - 20 \cdot (1/50) \cdot t + (10/2) \cdot (1/50)^2 \cdot t^2;$$

$$0 = 15 - 20 \cdot (1/50) \cdot t + 5 \cdot (1/50)^2 \cdot t^2 \text{ — перенесли все в одну сторону};$$

$$(1/50)^2 \cdot t^2 - 4 \cdot (1/50) \cdot t + 3 = 0 \text{ — разделили все на 5}.$$

Сделаем замену переменной: $(1/50) \cdot t = x$. Тогда $(1/50)^2 \cdot t^2 = x^2$, и все уравнение перепишется следующим образом:

$$x^2 - 4x + 3 = 0;$$

$(x - 3) \cdot (x - 1) = 0$ — корни квадратного уравнения легко угадываются без всякого

дискриминанта (см. урок «Теорема Виета»);

$$x_1 = 3; x_2 = 1.$$

Теперь вспоминаем, что такое x . Поскольку мы выполняли замену $x = (1/50) \cdot t$, имеем:

$$t = 50x;$$

$$t_1 = 50 \cdot 3 = 150;$$

$$t_2 = 50 \cdot 1 = 50.$$

Итак, у нас два кандидата на ответ: числа 50 и 150. Заметим, что в момент времени $t = 100$ высота столба воды равна:

$$H(100) = 20 - 20 \cdot (1/50) \cdot 100 + 5 \cdot (1/50)^2 \cdot 100^2 = 20 - 40 + 20 = 0.$$

Другими словами, через $t = 100$ секунд вода полностью вытечет из бака, и уравнение $H(t)$ теряет физический смысл. Поэтому вариант $t = 150$ нас не интересует. Остается только $t = 50$.

Ответ: 50

56. 45.

57. 60.

58.* 8218+

2.7. Применение логарифмической и показательной функции в жизни и профессиональной деятельности

59.* Решение: Подставим заданные величины в формулу. Получим:

$$B_t = 4,68 \cdot 10^5 \cdot \left(1 - \frac{5,7}{100}\right)^5 \approx 3,49 \cdot 10^5 \text{ руб.}$$

60.* Решение. $B = B_0 \cdot \left(1 - \frac{p}{100}\right)^x$, где $B = 200$ тыс. рублей, $B_0 = 500$ тыс. рублей,

$$x = 10 \text{ лет.}$$

$$200 = 500 \cdot \left(1 - \frac{p}{100}\right)^{10}; \quad \frac{2}{5} = (1 - 0,01p)^{10}; \quad 0,4^{0,1} = 1 - 0,01p; \quad 1 - 0,4^{0,1} = 0,01p;$$

$$p = \frac{1 - 0,4^{0,1}}{0,01} \approx 8,76 \text{ (\%)}$$

Ответ: ежегодный процент амортизации составляет 8,76%.

61.* Решение: Для решения этой задачи применим формулу сложных процентов:

$A = a \left(1 + \frac{p}{100}\right)^x$. Примем количество автомобилей за a , тогда получим:

$$1,5 = \left(1 + \frac{3}{100}\right)^x \text{ или } 1,03^x = 1,5.$$

Чтобы решить это показательное уравнение прологарифмируем его.

$$x \lg 1,03 = \lg 1,5, \text{ откуда } x = \frac{\lg 1,5}{\lg 1,03}.$$

$$\text{Найдя по таблице } \lg 1,5 \text{ и } \lg 1,03, \text{ получим } x = \frac{0,1761}{0,0128} = \frac{1761}{128} \approx 14.$$

Ответ: Примерно через 14 лет.

62. * Решение: Численность населения изменяется по формуле: $B = B_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^x$. В

нашей задаче $B=300$ тыс. человек, $p=3,5\%$, $x=10$ лет, B_0 - численность населения 10

$$\text{лет тому назад. Тогда } 300 = B_0 \cdot \left(1 + \frac{3,5}{100}\right)^{10}; 300 = B_0 \cdot 1,035^{10}$$

$$B_0 = \frac{300}{1,035^{10}} \approx 212,7 \text{ тысяч человек.}$$

Ответ: численность населения 10 лет назад равна 212,7 тыс. человек.

Вывод: Практическое применение логарифмов связано с их возможностью описывать процессы, при которых изменение одной величины **в** некоторое количество раз ведёт к изменению зависимой величины **на** некоторое количество раз. Или наоборот, одна величина меняется **на**, а другая изменяется **в**. Таким законам подчиняются, например, процессы размножения микроорганизмов, рост колоний бактерий, радиоактивный распад элементов, изменение скоростей химических реакций и т.п. Все эти процессы получили название процессов органического роста, поскольку математическая модель, их имеет одну и ту же структуру.

2.8. Тригонометрические функции в жизни и профессиональной деятельности человека

63. * Решение: Математическую модель биоритмов можно составить с помощью тригонометрической функции $y = \sin x$, т.к. эта функция периодическая, период равен 2π , и проходит через начало координат.

Функция $y = \sin x$, позволяет описывать периодические процессы, поэтому в основе модели лежат графики синусоидальных изменений с периодом 23,28,33 дня

соответственно со дня рождения: физический цикл $F_{\text{физ}}(x) = \sin\left(\frac{2\pi x}{23}\right)$;
 эмоциональный цикл $F_{\text{эмо}}(x) = \sin\left(\frac{2\pi x}{28}\right)$; интеллектуальный цикл $F_{\text{инт}}(x) = \sin\left(\frac{2\pi x}{33}\right)$,

где x -количество прожитых дней, рассчитанная как разность между датой рождения и датой отчета.

Синусом числа ***a*** называется ордината точки, изображающей это число на числовой окружности. Синусом угла в ***a*** радиан называется синус числа ***a***.

Синус- функция числа ***x***. Ее *область определения* - множество всех чисел, так как у любого числа можно найти ординату изображающей его точки.

Область значений синуса- отрезок от **-1** до **1**, так как любое число этого отрезка на оси ординат является проекцией какой-либо точки окружности, но никакая точка вне этого отрезка не является проекцией какой-либо из этих точек.

Период синуса равен 2π . Ведь через каждые 2π положение точки, изображающей число, в точности повторяется.

Знак синуса:

1. синус равен нулю при $x = \pi n$, где n - любое целое число;
2. синус положителен при $x \in (2\pi n, \pi + 2\pi n)$, где n - любое целое число;
3. синус отрицателен при $x \in (\pi + 2\pi n, 2\pi + 2\pi n)$, где n - любое целое число.

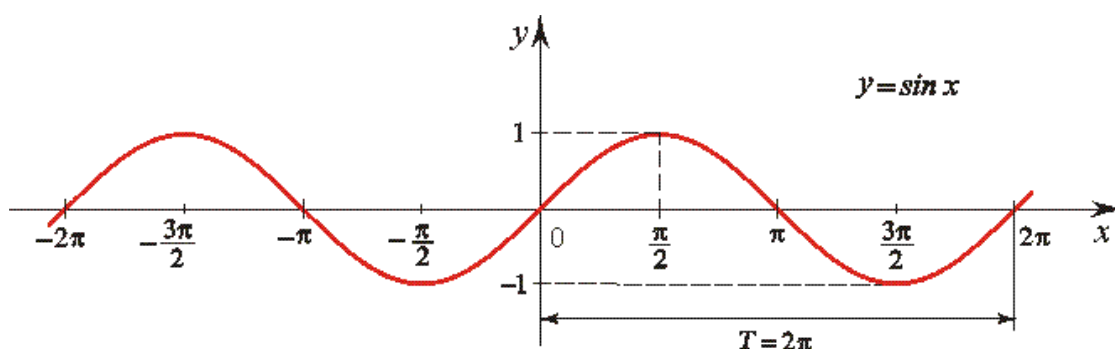
Синус- функция *нечетная*. Во-первых, область определения этой функции есть множество всех чисел, а значит, $D(\sin)$ симметрична относительно начала отсчета. А во-вторых, если отложить от начала два противоположных числа: ***x*** и **-*x***, то их ординаты - синусы - окажутся также противоположными. То есть $\sin(-x) = -\sin x$ для любого ***x***.

1. Синус возрастает на отрезках $\left[-\frac{\pi}{2} + 2\pi n, \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right]$, где n - любое целое число.
2. Синус убывает на отрезке $\left[\frac{\pi}{2} + 2\pi n, \frac{3\pi}{2} + 2\pi n\right]$, где n - любое целое число.

$$\max(\sin x) = 1 \text{ при } x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z};$$

$$\min(\sin x) = -1 \text{ при } x = \frac{3\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

Графиком функции является синусоида.



Поскольку рассчитывать все параметры заново каждый раз утомительно, нужно создать компьютерную модель для расчетов.

Составим **компьютерную модель**. Для моделирования выбираем среду табличного процессора. В этой среде математическая модель вносится в таблицу, которая содержит две области:

- исходные данные;
- расчетные данные.

1. Вводим исходные и расчетные данные.

Исходные данные: в ячейку B4 заносится дата рождения конкретного человека, в ячейку B5- дата сегодняшнего дня, в B6- длительность прогноза. В ячейках A9 по A38 происходит автозаполнение датами, в силу введенных формул заполняется ячейки B9-B38, C9-C38,D9-D38, вычисляющие значение графиков физического, эмоционального и интеллектуального состояний. По заполненным данным ячеек A9-D38 строю соответствующие графики, показывающие физический, эмоциональный и интеллектуальный биоритмы.

Расчетные данные: введем в ячейки расчетные формулы:

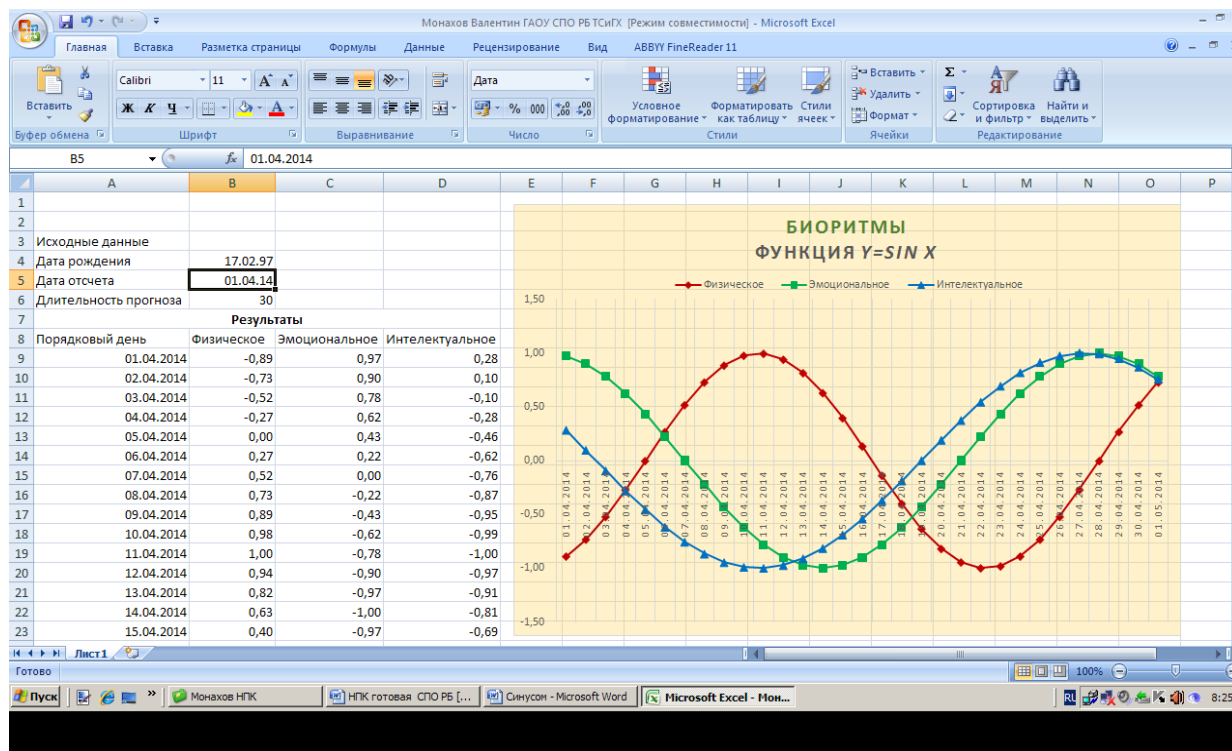
Ячейка	Формула
A9	=B\$5 (формула 1)
A10	=A9+1(формула 2)
B9	=SIN(2*ПИ()*(A9-\$B\$4)/23) (формула 3)
C9	=SIN(2*ПИ()*(A9-\$B\$4)/28) (формула 4)
D9	=SIN(2*ПИ()*(A9-\$B\$4)/33) (формула 5)

	A	B	C	D
1	Биоритмы			
2				
3	Исходные данные			
4	Дата рождения	06.03.1997		
5	Дата отсчета	01.04.2014		
6	Длительность прогноза	30		
7	Результаты			

8	Порядковый день	Физическое	Эмоциональное	Интеллектуальное
9	Формула 1	Формула 3	Формула 4	Формула 5
10	Формула 2	Заполнить вниз		
11	Заполнить			

2. Построим диаграмму.

С помощью команд: вставка/диаграмма, строим диаграмму:



2.9. Применение производной в практической и профессиональной деятельности

Транспорт.

64. * Решение:

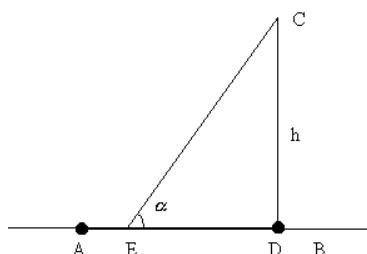


Рис. 1

Проведем из точки C перпендикуляр к прямой AB и обозначим длину отрезка CD через h , а длину отрезка AD через l . Тогда получим:

$$CE = \frac{h}{\sin \alpha}, DE = h \cdot \operatorname{ctg} \alpha$$

Отсюда находим время движения автомобиля по маршруту АЕС:

$$t = \frac{l}{V_{\text{ж}}} - \frac{h \operatorname{ctg} \alpha}{V_{\text{ж}}} + \frac{h}{V_{\alpha} \sin \alpha}$$

Так как точка А в наших рассуждениях зафиксирована условно, определяя лишь

направление движения по магистрали, то α может изменяться в промежутке $(0; \frac{\pi}{2})$.

Задача свелась к отысканию наименьшего значения функции $t(\alpha)$ на указанном промежутке.

Найдем производную: $t'(\alpha) = \frac{h}{V_{\alpha} \sin^2 \alpha} \left(\frac{V_{\alpha}}{V_{\text{ж}}} - \cos \alpha \right)$.

Так как $0 < \frac{V_{\alpha}}{V_{\text{ж}}} < 1$, то производная на рассматриваемом промежутке обращается в нуль лишь в одной точке

$\alpha_0 = \arccos \frac{V_{\alpha}}{V_{\text{ж}}}$, (1). Причем $t'(\alpha) < 0$ при $\alpha \in (0; \alpha_0)$ и $t'(\alpha) > 0$ при $\alpha \in (\alpha_0; \frac{\pi}{2})$.

Это означает, что на промежутке $(0; \alpha_0]$ функция t убывает, а на промежутке $[\alpha_0; \frac{\pi}{2})$ – возрастает. Следовательно, рассматриваемая функция t при $\alpha = \alpha_0$ достигает наименьшего значения.

Ответ: угол примыкания определяется по формуле $\alpha_0 = \arccos \frac{V_{\alpha}}{V_{\text{ж}}}$

65. Решение: $v = s'(t) = -3t^2 + 18t - 24;$ $-3t^2 + 18t - 24 = 0;$

$t_1 = 4, t_2 = 2. v(2) = 0, v(3) = 3, v(4) = 0$

66. 6,2.

67. 12.

68. Решение: $V = (64 - 2x) \cdot (40 - 2x) \cdot x. V'(x) = 12x^2 - 416x + 2560,$

$3x^2 - 104x + 640 = 0$

$D = 3136,$ Отсюда $x_1 = 160/6 = 80/3$ превышает 26 и лишено смысла, $x_2 = 8$

Ответ: 8 см.

69. Решение: Пусть r – радиус основания, V – объем цистерны, тогда ее высота равна

$\frac{V}{\pi \cdot r^2}$, а полная поверхность $S(r) = 2(\pi r^2 + \frac{V}{r})$. Требуется узнать, при каком r из промежутка $(0; +\infty)$, функция S достигает наименьшего значения.

Найдем производную: $S'(r) = 2(2\pi r - \frac{V}{r^2}) = 4\pi \frac{r^3 - \frac{V}{2\pi}}{r^2}$.

Замечаем, что производная всюду на рассматриваемом интервале существует и

обращается в нуль только в точке $r_0 = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$ причем $S'(r) < 0$ при $0 < r < r_0$ и $S'(r) > 0$ при $r > r_0$.

Функция S при $r = r_0$ достигает наименьшего значения. При величине радиуса $r = r_0$

высота цистерны $h_0 = \frac{V}{\pi \cdot r_0^2} = \sqrt[3]{\frac{4V}{\pi}} = 2\sqrt[3]{\frac{V}{\pi}} = 2r_0$, т.е. высота цилиндра должна быть равна его диаметру, а отношение равно 1.

Ответ: 1.

Строительство.

70. * *Решение:* Так как автомобильный кран может перемещаться вокруг всего здания, то крюк его крана достанет до любой точки здания, если он достанет (рис. 2) до середины крыши (имеется в виду середина по ширине).

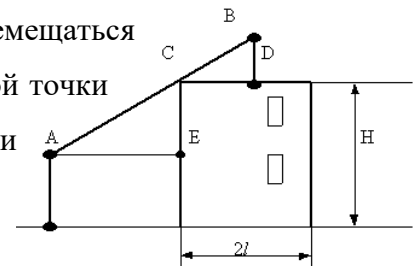


Рис. 2

Рассмотрим кран, который находится в точке O, подает деталь на середину крыши.

Пусть угол наклона стрелы при этом составляет α . Тогда $BC = \frac{CD}{\cos \alpha} = \frac{l}{\cos \alpha}$; $AC = \frac{CE}{\sin \alpha} = \frac{H-h}{\sin \alpha}$, где $h = AO$ – высота подвеса стрелы крана. В таком случае длина

стрелы крана $l = \frac{H-h}{\sin \alpha} + \frac{l}{\cos \alpha}$ (1)

Из формулы (1) видно, что для совершения указанной работы краном, установленным в другой точке (ближе к зданию или дальше от него), потребуется кран с другой длиной стрелы, поскольку при таком перемещении меняется угол α . Определим наиболее выгодное место установки крана, т.е. такое место, с которого заданная работа может быть выполнена краном с наименьшей длиной стрелы. Для

этого, очевидно, достаточно определить, при каком, α из промежутка $(0; \frac{\pi}{2})$ функция l принимает наименьшее значение.

Найдем

производную

функции

$$l : l'(\alpha) = \frac{l \sin^3 \alpha - (H-h) \cos^3 \alpha}{\sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha} = \frac{l \cos \alpha}{\sin^2 \alpha} \left(\operatorname{tg}^3 \alpha - \frac{H-h}{l} \right).$$

Производная обращается в нуль лишь в одной точке $\alpha_0 = \operatorname{arctg} \sqrt[3]{\frac{H-h}{l}}$ и функция l

достигает своего наименьшего значения при $\alpha_0 = \operatorname{arctg} \sqrt[3]{\frac{H-h}{l}}$.

Найдя из полученной формулы значение α_0 и подставив его в формулу (1), мы и получим наименьшее возможное значение стрелы. Эти формулы и используются на практике.

- 71. * Решение:** Из рис. 3 видно, что для ответа на вопрос задачи достаточно определить толщину выпиливаемых досок. Так как сторона квадрата, вписанного в окружность радиуса r ,

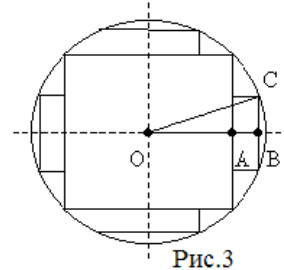


Рис.3

равна $r\sqrt{2}$, то $OA = \frac{d\sqrt{2}}{4}$.

Пусть толщина доски $AB = x$, тогда ее ширина $2BC = 2\sqrt{OC^2 - BO^2} = \frac{1}{2}\sqrt{d^2 - 4\sqrt{2}dx - 8x^2}$, а площадь поперечного сечения:

$$S(x) = 2AB \cdot BC = \frac{x}{2}\sqrt{d^2 - 4\sqrt{2}dx - 8x^2}.$$

Требуется узнать, при каком x из отрезка $[0; \frac{d(2-\sqrt{2})}{4}]$ функция S достигает наибольшего значения.

Найдем производную: $S'(x) = \frac{d^2 - 6\sqrt{2}dx - 16x^2}{2\sqrt{d^2 - 4\sqrt{2}dx - 8x^2}}$.

Критическая точка: $x_0 = \frac{\sqrt{34} - 3\sqrt{2}}{16}d \approx 0,10d$. Так как $S(0) = S(\frac{d(2-\sqrt{2})}{4}) = 0$, а $S(x_0)' > 0$, то доски толщиной $0,10d$ имеют наибольшую площадь поперечного сечения.

Ответ: $0,10d$.

72. * Решение: Ширину балки обозначим за x , поскольку осевое сечение представляет собой прямоугольник, вписанный в окружность радиуса R , то $0 \leq x \leq 2R$. Высота h прямоугольника связана с его шириной соотношением $x^2 + h^2 = (2R)^2 = 4R^2$. По теореме Пифагора $h^2 = 4R^2 - x^2$. Прочность балки y пропорциональна произведению xh^2 определяется, т.е. $y = kxh^2$, где k - коэффициент

Воспользуемся алгоритмом отыскания наибольших и наименьших величин:

$$y = kxh^2 = kx(4R^2 - x^2) = 4kR^2x - kx^3; \text{ где } x \in [0; 2R]$$

1. $y' = 4kR^2 - 3x^2$.

2. $y' = 4kR^2 - 3x^2 = 0$; $x_1 = \frac{2R}{\sqrt{3}}$, $x_2 = -\frac{2R}{\sqrt{3}}$. Заданному отрезку $x \in [0; 2R]$ принадлежит x_1 .

3. Вычислим значение функции $y = 4kR^2x - kx^3$ в точках x_1 и на концах отрезка, т.е. в точках

0 и $2R$: $f(0)=0, f(2R)=0, f(x_1)=f\left(\frac{2R}{\sqrt{3}}\right) > 0$. Значит, $y_{\text{наиб}} = f\left(\frac{2R}{\sqrt{3}}\right)$. Ширина $x = \frac{2R}{\sqrt{3}}$.

Далее найдем высоту: $h^2 = 4R^2 - x^2 = 4R^2 - \frac{4R^2}{3} = \frac{8R^2}{3}$. $h = \frac{2R\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$, $\frac{h}{x} = \frac{2R\sqrt{2}}{\sqrt{3}} : \frac{2R}{\sqrt{3}} = \sqrt{2}$.

Ответ: Сечением балки должен служить прямоугольник, у которого отношение высоты к ширине равно $\sqrt{2}$.

73. 50 м.

2.10. Геометрические задачи

74. 40 дней.

75. 7 м^3

76. 12 штук.

77. 15,3 кг.

78. 412 м.

79. $33,2 \text{ дм}^3$.

80. $4 \cdot 10^{-5} \text{ мм}$.

81. 1800 т.

82. 12 шт.

83. 13600 см^3 .

84. 4 см.

85. 9,5 кг

86. 4800.

87. 120 баков

88. А) 6 рулонов

Б) 60.

89. 765 штук.

90.* Создать математическую и компьютерную модель для расчета материала для строительства здания из бруса. Ситуация: продается брус, длина, ширина и высота которого известна. Необходимо провести исследование, которое позволит

автоматически определить необходимое количество бруса для строительства любого здания. Размеры здания задаются высотой (h), длиной (a) и шириной (b). При этом учесть, что 15 % площади стен комнаты занимают окна и двери, а при распиловке 3 процента бруса уходит в опилки и обрезки.

Объект	Параметры		Действия
	неуправляемые	управляемые	
Брус	обрезки - 3%	Наименование образцов. Длина бруса(L) Ширина бруса(d)	Выбор вида бруса. Расчет площади боковой грани бруса.
Здание	Неперекрываемая поверхность (окна, двери) - 15%	Высота(h). Длина(a). Ширина(b)	Измерение размеров a,b,h. Расчет площади стен
Расчет	Количество бруса		Расчет количества бруса

Решение: Составим информационную модель

Математическая модель

При расчете фактической площади боковой грани бруса, который пойдет на постройку стен, надо отбросить 3 % реальной площади на опилки и обрезки. Формула расчета имеет вид:

$$S_p = 0,97 * l * d,$$

где l — длина бруса, d — высота бруса.

При расчете фактической площади стен учитывается неперекрываемая площадь окон и дверей (15%)

$$S_{зд} = 0,85 * (a + b) * h.$$

Количество бруса, необходимого для постройки стен, вычисляется по формуле:
 $N = S_{зд} / S_{бруса} + 1$

где добавлено определенное кол-во (1) запасного бруса.

Компьютерная модель

Для моделирования выберем среду электронной таблицы. В этой среде информационная и математическая модели объединяются в таблицу, которая содержит три области:

- ✓ исходные данные — управляемые параметры (неуправляемые параметры учтены в формулах расчета);
- ✓ промежуточные расчеты;
- ✓ результаты.

Расчет количества бруса								
Исходные данные			Промежуточные расчеты	Результаты				
Управляемые параметры								
Брус								
Наименование	Длина	Ширина	Площадь боковой грани бруса	Количество брусьев	стоимость	цена за 1 куб м	цена (руб) 1 бруса	
Образец 1	4	0,15	0,54	138	52164	4200	378	
Образец 2	4	0,18	0,648	115	62596,8	4200	544,32	
Образец 3	6	0,15	0,81	92	59616	4800	648	
Образец 4	6	0,18	0,972	77	71850,24	4800	933,12	
Дом								
Высота	2,9		Площадь стен					
Ширина	8		73,95					
Длина	7							

91. * Фигурой постоянной ширины называется плоская выпуклая фигура, расстояние между любыми двумя параллельными опорными прямыми которой постоянно и равно a – «ширине» фигуры, то есть такие выпуклые фигуры, у которых ширина во всех направлениях одинакова.

Существует бесконечное множество таких фигур. Одним из примеров фигуры постоянной ширины является «треугольник Рело».

Он представляет собой область пересечения трёх равных кругов с центрами в вершинах правильного треугольника и радиусами r , равными его стороне. Негладкая замкнутая кривая, ограничивающая эту фигуру, также называется треугольником Рело. (Рис.1).

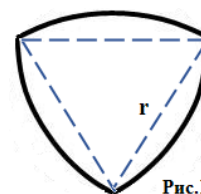


Рис.1

Треугольник Рело можно построить с помощью одного только циркуля, не пользуясь линейкой. Это построение сводится к последовательному проведению трёх окружностей одинакового радиуса, центр первой выбирается произвольно, центром второй является любая точка первой окружности, а центром третьей — одна из двух точек пересечения первых двух окружностей. (Рис.2)



Рис.2

Основные геометрические характеристики

1. Треугольник Рело, также как и круг, является фигурой постоянной ширины.

Данное утверждение проверено опытным путем, вращением трех геометрических фигур между двумя опорными параллельными прямыми (Рис.3).



Рис.3. Доказательство постоянства ширины

2. **Периметр треугольника Рело** совпадает с периметром круга. Это удивительное свойство можно доказать.

Рассмотрим две фигуры одинаковой ширины: круг и треугольник Рело.

Рассмотрим круг диаметра (ширины) a , радиуса r . У круга периметром является длина окружности и равен $2\pi r$. $P_{\text{круга}} = 2\pi r$ или $P_{\text{круга}} = \pi a$.

Чему равен периметр треугольника Рело ширины a ?

$P = \overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{BC} + \overset{\frown}{AC}$. Все стороны треугольника Рело равны. Значит, $P = 3 \cdot \overset{\frown}{AB}$.

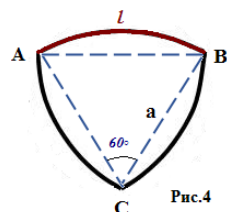
Найдем длину дуги $\overset{\frown}{AB}$.

Длина дуги, опирающийся на центральный угол в n° вычисляется по формуле:

$$l = \frac{\pi \cdot r}{180^\circ} \cdot n^\circ \quad \text{В нашем случае радиус } r \text{ равен } a \text{ (Рис.4)}$$

Нетрудно понять, что центральный угол $\angle ACB = 60^\circ$ (т.к. $\triangle ABC$ -равносторонний).

$$\overset{\frown}{AB} = \frac{\pi \cdot a}{180^\circ} \cdot 60^\circ, \quad \text{откуда получим} \quad \overset{\frown}{AB} = \frac{\pi \cdot a}{3}. \quad \text{Так как} \quad P = 3 \cdot \overset{\frown}{AB}.$$



Найдем $P_{\text{треугРело}} = 3 \cdot \frac{\pi \cdot a}{3} = \pi \cdot a$
Т.е. $P_{\text{круга}} = P_{\text{треуг Рело}}$, Ч.Т.Д.

3. **Площадь.** Также как и обычные треугольник и круг, треугольник Рело является плоской выпуклой геометрической фигурой, которая имеет определенную площадь,

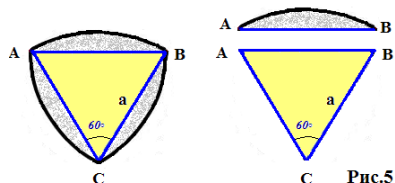
которая может быть вычислена по формуле $S_{\text{треугРело}} = \frac{1}{2} a^2 (\pi - \sqrt{3})$. Формула

выведена аналитическим методом, методом разрезания и сложения площадей (рис. 5,

рис.5.1). $S = S_{\triangle} + 3 \cdot S_{\text{сегмента}}$

Площадь равностороннего треугольника:

$$S_{\triangle} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}$$



Площадь кругового сектора: $S_{\text{сектора}} = \frac{\pi R^2}{360} \cdot \alpha$

В нашем случае: $S_{\text{сектора}} = \frac{\pi a^2}{360} \cdot 60 = \frac{\pi a^2}{6}$

$$S_{\text{сегмента}} = S_{\text{сектора}} - S_{\Delta} = \frac{\pi a^2}{6} - \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{2\pi a^2 - 3\sqrt{3}a^2}{12}$$

$$S_{\text{треугРело}} = S_{\Delta} + 3 \cdot S_{\text{сегмента}} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} + 3 \cdot \frac{2\pi a^2 - 3\sqrt{3}a^2}{12} = \frac{a^2 \sqrt{3} + 2\pi a^2 - 3\sqrt{3}a^2}{4} =$$

$$= \frac{a^2(\sqrt{3} + 2\pi - 3\sqrt{3})}{4} = \frac{a^2(\pi - \sqrt{3})}{2}$$



Рис.5.1. Определение площади треугольника Рело.

Следовательно, площадь треугольника Рело равна: $S_{\text{треугРело}} = \frac{1}{2} a^2 (\pi - \sqrt{3})$

Площадь треугольника Рело меньше площади круга (рис.6).



Рис.6. Сравнение площадей.

Треугольник Рело и круг выделяются от других фигур постоянной ширины своими экстремальными свойствами. Окружность ограничивает большую площадь, а треугольник Рело- минимальную площадь.

Среди всех фигур постоянной ширины a у треугольника Рело наименьшая площадь. Это утверждение носит название теоремы Бляшке — Лебега (по фамилиям немецкого геометра Вильгельма Бляшке, опубликовавшего теорему в 1915 году, и французского математика Анри Лебега, который сформулировал её в 1914 году)

$$S_{\text{треугРело}} = \frac{1}{2} a^2 (\pi - \sqrt{3}) \approx 0,70477 \cdot a^2$$

Фигура, обладающая противоположным экстремальным свойством — круг. Среди всех фигур данной постоянной ширины его площадь

$$S_{\text{круга}} = \frac{1}{4} a^2 \pi \approx 0,78539 \cdot a^2 \text{ максимальна.}$$

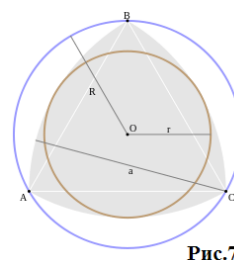
Площадь соответствующего треугольника Рело меньше на $\approx 10,27\%$. В этих пределах лежат площади всех остальных фигур данной постоянной ширины.

4. Симметричность:

Треугольник Рело обладает осевой и центральной симметрией.

5. Замечательные точки треугольника

Центры вписанной, описанной окружностей, ортоцентр и центр тяжести совпадают. Сумма радиусов вписанной и описанной окружностей равна ширине треугольника Рело, т.е. $a=R+r$.



(рис.7)

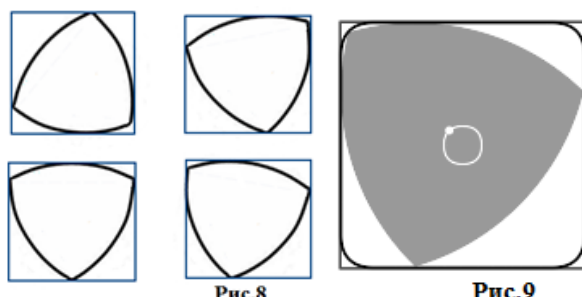


Рис.8

Рис.9

6. Треугольник Рело можно вписать в квадрат, он может вращаться в квадрате, плотно прилегая к сторонам, касаясь всех четырех сторон квадрата, каждая вершина треугольника при его вращении в квадрате «проходит» почти весь периметр квадрата (Рис.8), отклоняясь от этой траектории лишь в углах — там вершина описывает дугу эллипса. (Рис. 9).

Центр треугольника Рело при вращении движется по траектории, составленной из четырех одинаковых дуг эллипсов. Центры этих эллипсов расположены в вершинах квадрата, а оси повернуты на угол в 45° относительно сторон квадрата (Рис.10).

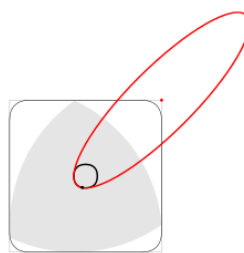


Рис.10

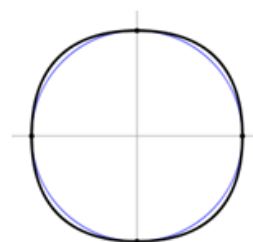


Рис.11

Траектория центра треугольника Рело при вращении в квадрате (Рис.11). Выделены точки сопряжения четырех дуг эллипсов.

Мы рассмотрели траекторию движения вершины треугольника при движении треугольника по прямой (Рис.12). Выяснилось, что так же как и у круга, траектория движения по прямой — циклоида (Рис.13).

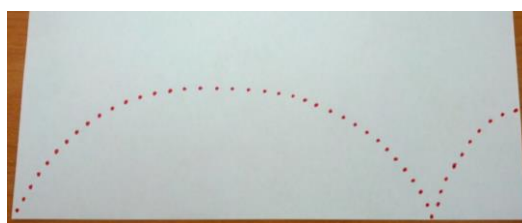


Рис.12

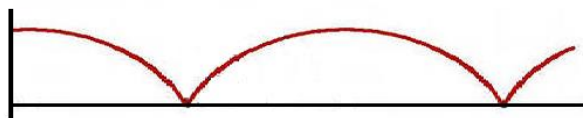
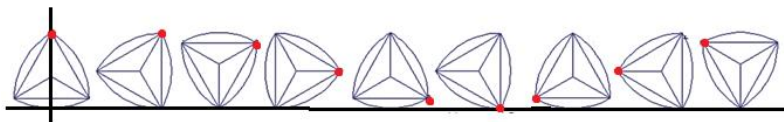


Рис. 13

Вывод: первоначально выдвинутая гипотеза о том, что треугольник Рело будет сочетать в себе свойства круга и равностороннего треугольника, а также характеризуется только ему присущими свойствами, подтверждена в ходе исследования.

История изобретения треугольника Рело

Треугольник Рело назван по имени Франца Рело (1829-1905) – немецкого учёного-инженера, подробно исследовавшего его. Рело дал определение кинематической пары.

(Кинематическая пара ([англ. kinematic pair](#)) — это соединение двух звеньев, обеспечивающее определённое относительное движение. Для всех кинематических пар необходим постоянный контакт между их элементами, это достигается либо с помощью определённых усилий, либо приданием элементам определённой геометрической формы). Связал теорию механизмов и машин с проблемами конструирования, например, впервые поставил и пытался решить проблему эстетичности технических объектов.



Ф. Рело

Однако, впервые эта фигура встречается XV веке в трудах Леонардо да Винчи, созданная им карта мира имеет вид четырех сферических треугольников, которые были показаны на плоскости карты треугольниками Рело, собранными по четыре вокруг полюсов (Рис.14).

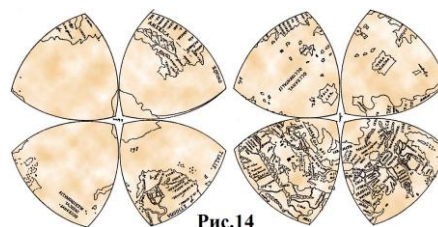


Рис.14

Позднее, в XVIII веке встречается идея построения треугольника в трудах Леонардо Эйлера.

Применение треугольника Рело

Применение треугольника Рело основано на его свойствах. Основные сферы применения в технике: сверло Уаттса (сверление квадратных отверстий), роторно-поршневой двигатель Ванкеля (внутри примерно цилиндрической камеры по сложной траектории движется трёхгранный ротор-поршень – треугольник Рело), грейферный механизм в кинопроекторах (используется свойство вращения треугольника Рело в квадрате со стороной a), кулачковые механизмы паровых двигателей, швейных машин и

часовых механизмов, крышки для люков (свойство постоянной ширины), в качестве медиатора. Кроме того, еще с XIII века используется свойство симметричности и гармонии в архитектурных сооружениях на основе стрельчатых арок и элементов орнамента.

Применение в некоторых механических устройствах

1. Сверление квадратных отверстий.

В 1914 году английский инженер Гарри Джеймс Уаттс изобрёл инструмент для сверления квадратных отверстий (рис.), с 1916 года сверла находятся в серийном производстве. Сверло Уаттса представляет собой треугольник Рело, в котором заточены режущие кромки и прорезаны углубления для отвода стружки.



Рис.14. Сверло Уаттса.

2. Применение в автомобильных двигателях.

Треугольник Рело используется и в автомобильных двигателях. В 1957 году немецкий инженер, изобретатель Ф. Ванкель, сконструировал роторно-поршневой двигатель. Внутри примерно цилиндрической камеры по сложной траектории движется трёхгранный ротор-поршень – треугольник Рело (Рис.15). Он вращается так, что три его вершины находятся в постоянном контакте с внутренней стенкой корпуса, образуя три замкнутых объёма, или камеры сгорания.

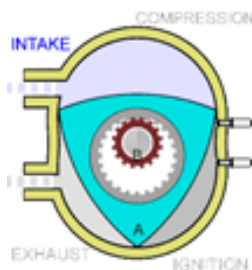
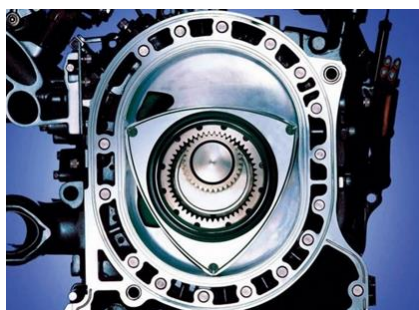


Рис.15. Двигатель Ванкеля.

Фактически каждая из трёх боковых поверхностей ротора действует как поршень. Достоинства РПД: компактность, отсутствие кривошипно-шатунного и газораспределительного механизмов, а также значительно меньших габаритов и массы при одинаковой с поршневыми двигателями внутреннего сгорания мощности. Недостатка РПД: часто выходящие из строя уплотнительные элементы, плохая приспособляемость к изменениям внешней нагрузки, повышенный расход топлива и неудовлетворительные показатели по выбросам в отработавших газах. В настоящее время в серийном

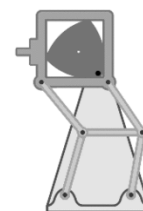
производстве находятся автомобили с РПД Mazda RX-8.

Поиски альтернативных видов топлива для автомобилей заставил вновь обратить внимание на роторно-поршневой двигатель Ванкеля. Разработчики Mazda уверяют, что по природе своей роторно-поршневой агрегат гораздо лучше приспособлен для работы на водороде, нежели традиционные моторы. Впрочем, по прогнозам специалистов, уже к 2025 году более четверти мирового автопарка будет использовать в качестве топлива водород. Так что возможно, будущее за роторно-поршневыми двигателями.

3. Применение треугольника Рело в рейферном механизме в кинопроекторах.

Двигатели создают равномерное вращение оси, а для четкого изображения пленку нужно протянуть мимо объектива на один кадр, дать ей постоять, потом еще раз протянуть и так 18 раз в секунду. С этой задачей справляется рейферный механизм. Он основан на треугольнике Рело, вписанном в квадрат и двойном параллелограмме, что не позволяет кадру наклоняться в сторону (Рис.16). Если близко расположить ось крепления к вершине треугольника Рело, тем более близкую к квадрату фигуру описывает зубчик рейфера.

Рис.16



4. Крышки для люков.

В форме треугольника Рело можно изготавливать крышки для люков —

опытным путем доказано, что благодаря постоянной ширине они не могут провалиться в люк. В Сан-Франциско, для системы рекуперирования воды корпуса люков имеют форму треугольника Рело. За счет того, что у треугольника Рело площадь меньше, чем у круга, себестоимость люков в форме треугольников Рело была бы ниже, чем у традиционно круглых. Перейдя на серийное производство люков в форме треугольника Рело, на мой взгляд, можно было бы быстрее решить проблему открытых колодцев и избежать травматизма и смертей людей.

Треугольник Рело в архитектуре

Форма треугольника Рело, его свойство симметричности, используется и в архитектурных целях. Конструкция из двух его дуг образует характерную для готического стиля стрельчатую арку, однако целиком он встречается в готических сооружениях довольно редко. Окна в форме треугольника Рело использовали еще в VIII веке в церкви Богоматери в Брюгге, а также в шотландской церкви в Аделаиде. Как элемент орнамента он встречается на оконных решётках цистерцианского аббатства в швейцарской коммуне Отрив (приложение 1)

Треугольник Рело используют и в архитектуре, не принадлежащей к готическому

стилю. Например, построенная в 2006 году в Кёльне 103-метровая башня под названием «Кёльнский треугольник» в сечении представляет собой именно эту фигуру.

Заключение

Несколько тысяч лет назад было изобретено колесо, которое произвело переворот в жизни человека. Определяющим свойством, следствием которого стало техническое завоевание мира, стало свойство постоянства ширины. Но, как оказалось, круг – не единственная фигура, которая обладает этим свойством. Вызвавший мой интерес, треугольник Рело, также принадлежит этому семейству.

В своей работе мы не только изучили его свойства, геометрические характеристики, историю изобретения, но и рассмотрели сферы применения этой выпуклой, симметричной фигуры постоянной ширины. Выдвинутая нами гипотеза о свойствах этой фигуры нашла свое подтверждение.

Кроме того, мы нашли информацию познавательного характера: что канализационные люки делают не только круглыми, но и в форме треугольника Рело; что треугольник Рело используется не только в технике, но и в архитектуре.

Алгебра

Таблица квадратов целых чисел от 0 до 99

Десятки	Единицы									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	1	4	9	16	25	36	49	64	81
1	100	121	144	169	196	225	256	289	324	361
2	400	441	484	529	576	625	676	729	784	841
3	900	961	1024	1089	1156	1225	1296	1369	1444	1521
4	1600	1681	1764	1849	1936	2025	2116	2209	2304	2401
5	2500	2601	2704	2809	2916	3025	3136	3249	3364	3481
6	3600	3721	3844	3969	4096	4225	4356	4489	4624	4761
7	4900	5041	5184	5329	5476	5625	5776	5929	6084	6241
8	6400	6561	6724	6889	7056	7225	7396	7569	7744	7921
9	8100	8281	8464	8649	8836	9025	9216	9409	9604	9801

Свойства арифметического квадратного корня

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \text{ при } a \geq 0, b \geq 0 \quad \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \text{ при } a \geq 0, b > 0$$

Корни квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \text{ при } b^2 - 4ac > 0$$

$$x = -\frac{b}{2a} \text{ при } b^2 - 4ac = 0$$

Формулы сокращенного умножения

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$$

Процентом числа называется сотая часть этого числа.

Нахождение процентов заданного числа: $p\%$ числа a равны $a \cdot p/100$.

Чтобы найти несколько процентов данного числа a , достаточно данное число разделить на 100 и умножить результат на число процентов p .

Нахождение числа по данной величине его процентов. Если $p\%$ некоторого числа составляет число a , то все число равно $a \cdot 100/p$.

Чтобы найти число по данной величине его процентов p , надо умножить данное число a на число процентов p и результат уменьшить в 100 раз.

Нахождение процентного отношения двух чисел. Процентное отношение числа a к числу b вычисляется по формуле $(a/b) \cdot 100$.

Чтобы вычислить процентное отношение числа a к числу b , нужно найти отношение a к b и умножить его на 100.

Пропорцией называется равенство двух отношений

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}.$$

Основное свойство пропорции. Произведение крайних членов пропорции равно произведению ее средних членов:

$$ad = bc.$$

ПРОИЗВОДНЫЕ ПРОПОРЦИИ

$$\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d};$$

$$\frac{a+b}{a} = \frac{c+d}{c};$$

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d};$$

$$\frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d};$$

$$\frac{a-b}{a} = \frac{c-d}{c};$$

$$\frac{a+c}{b+d} = \frac{a}{b} = \frac{c}{d}.$$

Степень и логарифм

Свойства степени
при $a > 0, b > 0$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$$

$$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$$

$$(a^n)^m = a^{nm}$$

$$(ab)^n = a^n \cdot b^n$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

Свойства логарифма

при $a > 0, a \neq 1, b > 0, x > 0, y > 0$

$$a^{\log_a b} = b$$

$$\log_a a = 1$$

$$\log_a 1 = 0$$

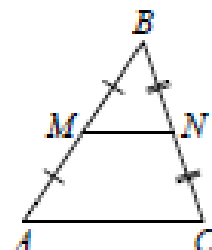
$$\log_a (xy) = \log_a x + \log_a y$$

$$\log_a \left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$$

$$\log_a b^k = k \log_a b$$

Геометрия

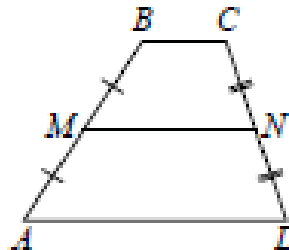
Средняя линия треугольника и трапеции



MN — ср. лин.

$$MN \parallel AC$$

$$MN = \frac{AC}{2}$$



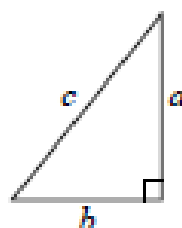
$BC \parallel AD$

MN — ср. лин.

$$MN \parallel AD$$

$$MN = \frac{BC + AD}{2}$$

Теорема Пифагора



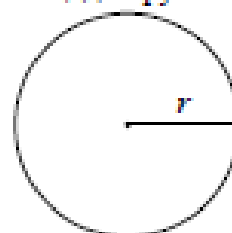
$$a^2 + b^2 = c^2$$

Длина окружности

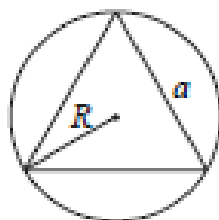
$$C = 2\pi r$$

Площадь круга

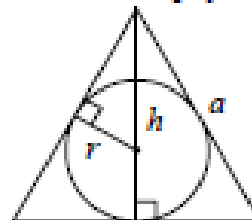
$$S = \pi r^2$$



Описанная и вписанная окружности правильного треугольника



$$R = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

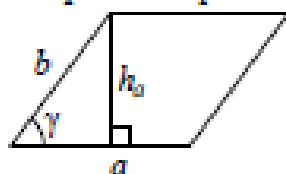


$$r = \frac{a\sqrt{3}}{6}$$

$$h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

Площади фигур

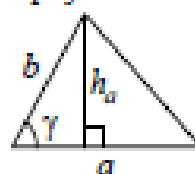
Параллелограмм



$$S = ah_a$$

$$S = ab \sin \gamma$$

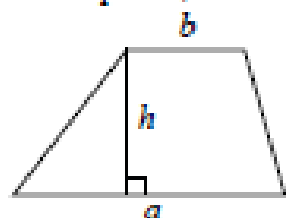
Треугольник



$$S = \frac{1}{2} ah_a$$

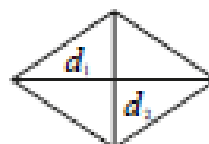
$$S = \frac{1}{2} ab \sin \gamma$$

Трапеция



$$S = \frac{a+b}{2} \cdot h$$

Ромб

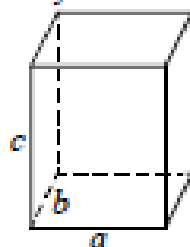


d_1, d_2 – диагонали

$$S = \frac{1}{2} d_1 d_2$$

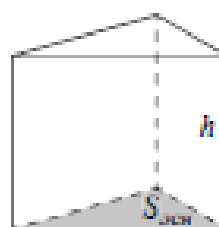
Площади поверхностей и объёмы тел

Прямоугольный параллелепипед



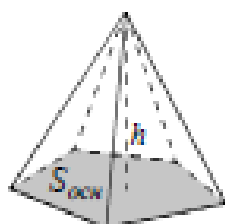
$$V = abc$$

Прямая призма



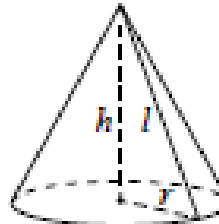
$$V = S_{осн} h$$

Пирамида



$$V = \frac{1}{3} S_{осн} h$$

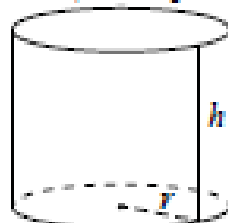
Конус



$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 h$$

$$S_{дл.е} = \pi r l$$

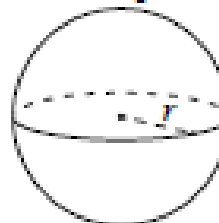
Цилиндр



$$V = \pi r^2 h$$

$$S_{дл.е} = 2\pi r h$$

Шар

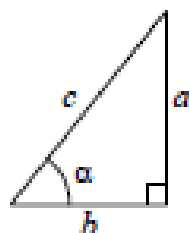


$$V = \frac{4}{3} \pi r^3$$

$$S = 4\pi r^2$$

Тригонометрические функции

Прямоугольный треугольник

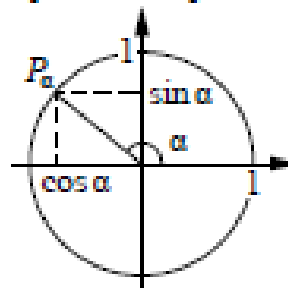


$$\sin \alpha = \frac{a}{c}$$

$$\cos \alpha = \frac{b}{c}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b}$$

Тригонометрическая окружность



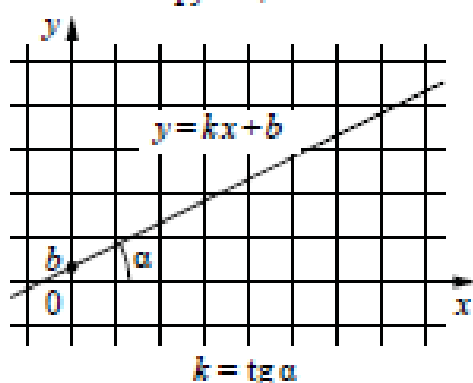
Основное тригонометрическое тождество: $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$

Некоторые значения тригонометрических функций

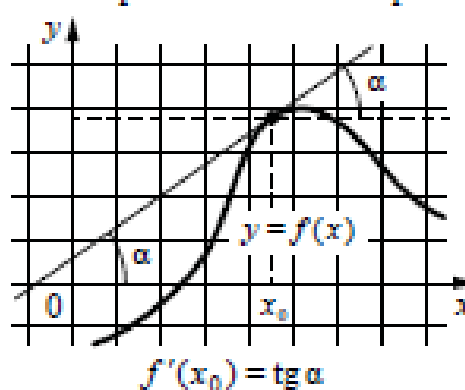
α	радианы	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
	градусы	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
$\sin \alpha$		0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
$\cos \alpha$		1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
$\operatorname{tg} \alpha$		0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	—	0	—	0

Функции

Линейная функция



Геометрический смысл производной



Литература

1. Башмаков М.И. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Базовый уровень: учебник для 10,11 класса.- М.: Бином. Лаборатория знаний, 2013
2. Мордкович А.Г. Алгебра и начала анализа. 10-11 кл.: В двух частях.Ч.1: Учеб. для общеобразоват. учреждений (базовый уровень) – 9-е изд. – М.: Мнемозина, 2010
3. Мордкович А.Г. Алгебра и начала анализа. 10-11 кл.: В двух частях.Ч.2: Задачник для общеобразоват. учреждений (базовый уровень) – 9-е изд. – М.: Мнемозина, 2010
4. Мордкович А.Г. Алгебра и начала анализа. 10-11 кл.: В двух частях.Ч.1: Учеб. для общеобразоват. учреждений (профильный уровень) – 7-е изд. – М.: Мнемозина, 2010
5. Мордкович А.Г. Алгебра и начала анализа. 10-11 кл.: В двух частях.Ч.2: Задачник для общеобразоват. учреждений (базовый уровень) – 7-е изд. – М.: Мнемозина, 2010
6. Л.С.Атанасян и др. Геометрия, 10-11классы. – М.: Просвещение, 2011.
7. Сборник задач по математике: учеб. Пособие для ссузов/Н.В.Богомолов. – 5-е изд., стереотип. – М.: Дрофа, 2009. – 204, [4] с.: ил.
8. Изучение геометрии в 10-11 классах: Метод. Рекомендации учеб.: Кн. для учителя/С. М. Саакян, В. Ф. Бутузов. – 2-е изд.– М.: Просвещение, 2003. – 222 с.: ил.
9. Изучение алгебры и начал анализа в 10-11 классах: Кн. для учителя / Н. Е. Федорова, М. В. Ткачева. – 2-е изд.– М.: Просвещение, 2004. – 205 с.: ил.
10. А.Н. Колмогоров. Алгебра и начала анализа, 10-11 классы. – М.: Просвещение, 2006г
11. Математика. Подготовка к ЕГЭ-2013: учебно- методическое пособие/ Под ред. Ф.Ф. Лысенко, С.Ю. Кулабухова. – Ростов-на-Дону: Легион, 2012. – 416 с. – (Готовимся к ЕГЭ)
12. Математика. Подготовка к ЕГЭ-2014: учебно- методическое пособие/ Под ред. Ф.Ф. Лысенко, С.Ю. Кулабухова. – Ростов-на-Дону: Легион, 2013. – 418 с. – (Готовимся к ЕГЭ)

13. Математика. Подготовка к ЕГЭ-2015: учебно- методическое пособие/ Под ред. Ф.Ф. Лысенко, С.Ю. Кулабухова. – Ростов-на-Дону: Легион, 2014. – 256 с. – (Готовимся к ЕГЭ)

Интернет-ресурсы:

1. http://www.tgl.net.ru/wiki/index.php/Прикладная_и_практическая_направленность_о_бучения_математике
2. <http://www.berdov.com/ege/>
3. <http://www.ege.edu.ru/> - демоверсии КИМов ЕГЭ по математике одобренных ФИПИ
4. <http://mathege.ru/>
5. <http://www.matematika-ege.ru/ege2010/>
6. <http://www.problems.ru>
7. <http://mat.1september.ru>
8. <http://www.uchportal.ru/>
9. <http://www.zavuch.info/>
10. <http://nsportal.ru/>
11. http://www.exponenta.ru/educat/links/1_educ.asp#0 – Полезные ссылки на сайты математической и образовательной направленности: Учебные материалы, тесты
12. <http://www.fxyz.ru/> - Интерактивный справочник формул и сведения по алгебре, тригонометрии, геометрии, физике.
13. <http://maths.yfa1.ru> - Справочник содержит материал по математике (арифметика, алгебра, геометрия, тригонометрия).
14. allmatematika.ru - Основные формулы по алгебре и геометрии: тождественные преобразования, прогрессии, производная, стереометрия и проч.