

НЕКОТОРЫЕ ПРИЕМЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ НА ВЫЧИСЛЕНИЕ ПЛОЩАДЕЙ МНОГОУГОЛЬНИКОВ. ИЗ ОПЫТА РАБОТЫ.

Глушкова С.З., ГБОУ СОШ №547 Санкт-Петербург, учитель.

В данной статье представлены несколько типов задач на вычисление площади многоугольника, нахождение отношения площадей. Задачи разного уровня сложности. Данная статья будет полезна как начинающему учителю математики, так и обучающимся 8-11 классов.

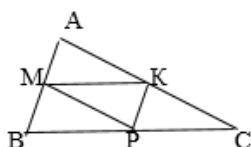
Площадь — часть поверхности, ограниченная замкнутым контуром, одна из количественных характеристик плоских геометрических фигур и поверхностей.

Равные фигуры имеют равные площади.

Равновеликие фигуры – фигуры, площади которых равны.

Свойство 1 Средние линии треугольника разбивают его на 4 равных треугольника.

Доказательство:



1. По свойству средней линии треугольника $MK = \frac{1}{2}BC = BP = PC$

$$MP = \frac{1}{2}AC = AK = KC$$

$$KP = \frac{1}{2}AB = BM = MA$$

2. $\triangle MAK = \triangle BMP = \triangle MKP = \triangle KPC$ по трем сторонам.

$$3. S_{BMKC} = 4S_{AMK} = \frac{3}{4}S_{ABC}$$

Задача 1

а) В треугольнике ABC отмечены середины M и N сторон BC и AC соответственно. Площадь треугольника CNM равна 20. Найдите площадь четырехугольника $ABMN$.

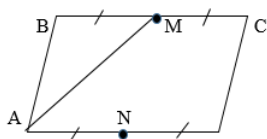
Решение. По свойству 1 получаем, что площадь $ABMN$ в 4 раза больше площади треугольника ABC . *Ответ: 80*



б) В треугольнике ABC отмечены середины M и N сторон BC и AC соответственно. Площадь треугольника ABC равна 20. Найдите площадь четырехугольника $ABMN$.

Решение. По свойству 1 получаем, что площадь $ABMN$ составляет $\frac{3}{4}$ площади треугольника ABC . *Ответ: 15*

Свойство 2 Отрезок, соединяющий вершину параллелограмма с серединой противоположной стороны, отсекает от него треугольник, площадь которого равна $\frac{1}{4}$ площади параллелограмма.



Доказательство

1. Отметим N-середины AD, $BM=MC=AN=ND$

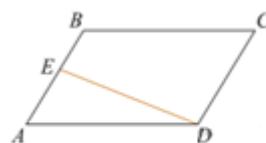
(свойство параллелограмма)

2. $ABMN \sim NMCD$ (параллелограмм)

$$3. S_{ABM} = \frac{1}{2} S_{ABNM} = \frac{1}{4} S_{ABCD}$$

Задача 2

а) Площадь параллелограмма $ABCD$ равна 18. Точка E — середина стороны AB . Найдите площадь трапеции $EBCD$.



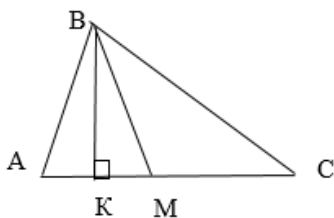
Решение. Используя свойство 2, получаем, что площадь $EBCD$ составляет $\frac{3}{4}$ от площади параллелограмма $ABCD$. Ответ: 4,5

б) Точка E — середина стороны AB параллелограмма $ABCD$. Площадь трапеции $EBCD$ равна 18. Найдите площадь параллелограмма $ABCD$.

Решение. Используя свойство 2, получаем, что площадь $ABCD$ составляет $\frac{4}{3}$ от площади трапеции $EBCD$. Ответ: 24

Свойство 3 Площади треугольников, имеющих одинаковую высоту, относятся как основания, к которым проведены эти высоты

Доказательство



1. Пусть $AM : MC = a :$

2. BK высота треугольника ABM и BMC

$$3. \frac{S_{ABM}}{S_{BMC}} = \frac{\frac{1}{2} AM \cdot BK}{\frac{1}{2} CM \cdot BK} = \frac{AM}{CM} = \frac{a}{b}$$

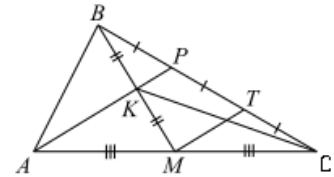
$$4. S_{ABM} = \frac{a}{a+b} S_{ABC}$$

Следствие. Медиана треугольника делит его на две равновеликие части

Задача 3

Через середину K медианы BM треугольника ABC и вершину A проведена прямая, пересекающая сторону BC в точке P . Найдите отношение площади треугольника ABK к площади четырёхугольника $KPCM$.

Решение



1. Проведём отрезок MT , параллельный AP . Тогда MT — средняя линия треугольника APC и $CT = TP$, а KP — средняя линия треугольника BMT и $TP = BP$.

2. Треугольники BKP и KPC имеют одну и ту же высоту, проведенную из вершины K , а основание одного в два раза больше основания другого, значит площадь треугольника KPC равна двум площадям треугольника BKP .

3. Аналогично, треугольники CKB и CMK имеют одну высоту, проведённую из вершины C , и равные основания, значит их площади равны трем площадям треугольника BKP .

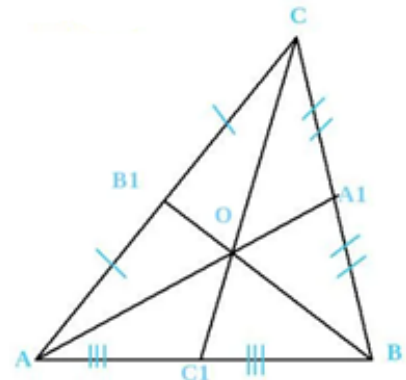
4. В свою очередь равны площади треугольников AMK , ABK и CMK равны, т.е.

$$S_{KPCM} = 5S_{BKP}, S_{ABK} = 3S_{BKP}, \text{ значит } S_{ABK} : S_{KPCM} = 3 : 5 = 0,6. \text{ Ответ: } 0,6.$$

Задача 4

Докажите, что медианы треугольника делят его на 6 равновеликих частей.

Доказательство.



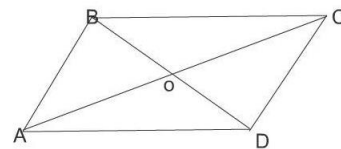
1. $S_{ACC1} = S_{BCC1}$ и $S_{AOC1} = S_{BOC1}$, т.к. медиана треугольника делит его на две равновеликие части. Значит $S_{ACO} = S_{BCO}$.

2. $S_{AOB1} = S_{COB1} = \frac{1}{2}S_{AOC}$; $S_{COA1} = S_{BOA1} = \frac{1}{2}S_{BOC}$, значит $S_{AOB1} = S_{COB1} = S_{COA1} = S_{BOA1}$

3. Аналогично доказывается равенство площадей всех треугольников, получившихся при пересечении медиан.

Задача 5

Диагонали параллелограмма разбивают его на четыре равновеликих треугольника.



Решение.

1. Треугольники BOC и DOA имеют одну высоту из вершины C и равные основания $BO=OD$ (свойство диагоналей параллелограмма), значит $S_{BOC} = S_{DOA}$
2. Треугольники DOC и BOA имеют одну высоту из вершины D и равные основания $CO=OA$ (свойство диагоналей параллелограмма), значит $S_{DOC} = S_{BOA}$, значит $S_{BOC} = S_{DOA} = S_{DOC} = S_{BOA}$
3. Аналогично доказывается, что $S_{AOD} = S_{AOB}$.

Задача 6

В треугольнике ABC на его медиане BM отмечена точка K так, что $BK : KM = 3 : 7$. Найдите отношение площади треугольника ABK к площади треугольника ABC

Решение.

1. Медиана BM делит треугольник ABC на два

равновеликих. Значит $S_{ABM} = S_{MBC} = \frac{1}{2} S_{ABC}$.

2. Треугольники ABK и AMK имеют общую высоту из вершины A, отношение их оснований дано в условии $BK : KM = 3 : 7$.

Следовательно, $S_{ABK} = \frac{3}{7} S_{AMK}$

$$3. S_{ABM} = S_{ABK} + S_{AKM} = \frac{3}{7} S_{AMK} + S_{AMK} = \frac{10}{7} S_{AMK}$$

$$4. S_{ABC} = 2S_{ABM} = 2 \cdot \frac{10}{7} S_{AMK} = \frac{20}{7} S_{AMK}$$

$$\frac{S_{ABK}}{S_{ABC}} = \frac{\frac{3}{7} S_{AMK}}{\frac{20}{7} S_{AMK}} = 0,15$$

Ответ: 0,15

