

Тема: Различные способы доказательства теоремы Пифагора

ФИО учителя: Чыдат Чодураа Ким-ооловна.

Должность: учитель математики.

СОДЕРЖАНИЕ:

1. Введение.
2. Цели.
3. Задачи.
4. История.
5. Различные способы доказательства теоремы.
6. Практическое применение.
7. Заключение.
8. Используемая литература.

1. Введение

По словам Иоганна Кеплера, в геометрии существуют два сокровища:

1. Теорема Пифагора, которую можно сравнить с мерой золота.
2. Золотое сечение, которое можно сравнить с драгоценными камнями.

Теорема Пифагора является одной из важнейших теорем курса геометрии 8 класса. Она возникла из потребности человека выполнять измерения на местности, применяется при доказательстве других теорем, решении многих задач. Теорема известна с древнейших времен. На занятиях во внеурочной деятельности мы рассмотрели несколько из способов ее доказательства. Во внеурочных занятиях 8-классники предпочитают наглядные задачи, благодаря которым возникает в голове образ. А можно ли учить теоремы с помощью образов? Можно, если это великая теорема Пифагора, и с ней связано множество легенд и историй. Мы предлагаем вам топ-10 фактов о теореме Пифагора. Теперь запомнить ее будет еще легче!

2. Цели

- расширить знания учащихся по истории математики;
- узнать больше информации, легенд, мифов о Пифагоре и о его теореме;
- познакомиться с различными способами доказательства теоремы Пифагора;
- найти ответ на вопрос «в чем уникальность теоремы Пифагора?».

3. Задачи

- найти исторический материал из биографии Пифагора и о его теореме;
- найти и разобрать различные способы доказательства теоремы Пифагора;
- рассмотреть применение теоремы Пифагора при решении задач из различных разделов геометрии.

4.История



Великий ученый Пифагор родился около 570 г. до н.э. на острове Самосе. Отцом Пифагора был Мнесарх, резчик по драгоценным камням. Имя матери Парфениса. По многим античным свидетельствам, родившийся мальчик был сказочно красив. Мнесарх, как всякий отец, мечтал, что сын будет продолжать его дело — ремесло золотых дел мастера. Жизнь рассудила иначе. Будущий великий математик и философ уже

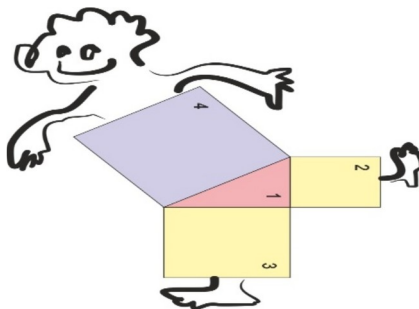
в детстве обнаружил большие способности к наукам. У своего первого учителя Гермодамаса Пифагор получает знания основ музыки и живописи. Для упражнения памяти Гермодамас заставлял его учить песни из «Одиссеи» и «Илиады». Страсть к музыке и поэзии великого Гомера Пифагор сохранил на всю жизнь. Вскоре, неугомонному воображению юного Пифагора стало тесно на маленьком Самосе, и он отправляется в Милет, где встречается с другим ученым - Фалесом. Затем отправляется в путешествие и попадает в плен к вавилонскому царю Киру. В 530 г. до н.э. Кир двинулся в поход против племен в Средней Азии. И, пользуясь переполохом в городе, Пифагор сбежал на родину. А на Самосе в то время царствовал тиран Поликрат. После нескольких месяцев притязаний со стороны Поликрата, Пифагор переселяется в Кротон. В Кротоне Пифагор учредил нечто вроде религиозно-этического братства или тайного монашеского ордена ("пифагорейцы"), члены которого обязывались вести так называемый пифагорейский образ жизни.

5. Различные способы доказательства теоремы

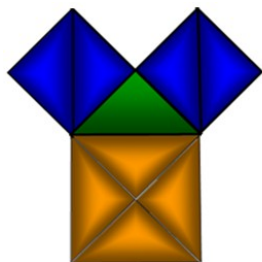
Измеряй свои желания,
взвешивай свои мысли,
исчисляй свои слова.

Пифагор

1. Пифагоровы штаны.



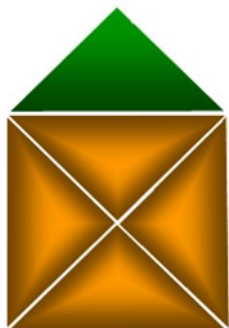
Происхождение пифагоровых штанов, которые во все стороны равны, понятно: построенные на сторонах треугольника и расходящиеся в разные стороны квадраты напоминали школьникам покрой мужских штанов. Правда, это как посмотреть: средневековые школяры называли эту теорему «pons asinorum», что означает «ослиный мост».



Рассмотрим прямоугольный равнобедренный треугольник. На его сторонах строят квадраты.



Квадраты, построенные на катетах исходного треугольника, содержит по 2 таких треугольника.



Квадрат, построенный на гипотенузе исходного треугольника, содержит четыре таких треугольника.

2. **Книга рекордов Гиннесса** называет теорему Пифагора теоремой с максимальным числом доказательств. И поясняет в 1940 году была опубликована книга, которая содержала триста семьдесят доказательств теоремы Пифагора, включая одно предложенное президентом США Джеймсом Абрамом Гарфилдом.

3. **Теорему Пифагора доказывали через подобные треугольники, методом площадей и даже через дифференциальные уравнения** – это сделал английский математик начала двадцатого века Годфри Харди. Известны доказательства теоремы Пифагора, предложенные Евклидом и Леонардо Да Винчи.

А Электроник – мальчик из чемоданчика в книге Евгения Велтистова знал целых двенадцать способов, а среди них «метод укладки паркета» и «стул невесты».

Доказательство через подобие треугольников:

$$\text{В } \triangle ABC \angle C = 90^\circ$$

1.

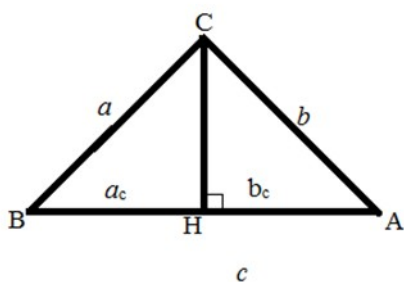
Проведем высоту CH

2.

Рассмотрим $\triangle ACH$ и $\triangle ABC$

$\triangle ACH \sim \triangle ABC$ (по двум углам)

$$\frac{b}{c} = \frac{h}{a} = \frac{AH}{b}$$



3. Рассмотрим $\triangle BCH$ и $\triangle ABC$

$\triangle BCH \sim \triangle ABC$ (по двум углам)

$$\frac{a}{c} = \frac{h}{b} = \frac{BH}{a} \quad (\text{по определению}).$$

$$4. \quad \frac{a}{c} = \frac{BH}{a}; \quad \frac{b}{c} = \frac{AH}{b},$$

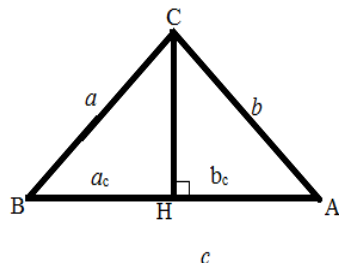
$$a^2 = c \cdot BH;$$

$$b^2 = c \cdot AH$$

$$a^2 + b^2 = c \cdot BH + c \cdot AH$$

$$a^2 + b^2 = c \cdot (BH + AH)$$

$$a^2 + b^2 = c^2$$



4. Приближенное вычисление гипотенузы

прямоугольного треугольника обнаруживается в

вавилонских текстах времен правления царя

Хаммурапи, то есть за два тысячелетия до нашей

эры. Весьма вероятно, что теорема о квадрате гипотенузы была известна в

Индии уже около VIII века до нашей эры.

5. Доказательство по косинусу: $\cos A = \frac{\text{прилежащий катет}}{\text{гипотенуза}}$ 1. В $\triangle ABC$: $\angle C = 90^\circ$.

Проведем высоту $CH = h$.

2. $\triangle ACH$: $\angle H = 90^\circ$,

$$\cos A = \frac{b_c}{b} = \frac{AH}{AC}$$

3. $\triangle ABC$: $\angle C = 90^\circ$

$$\cos A = \frac{b}{c} = \frac{AC}{AB}$$

$$4. \frac{AH}{AC} = \frac{AC}{AB},$$

$$AC^2 = AH \cdot AB$$

$$b^2 = b_c \cdot c$$

5. $\triangle BCH$: $\angle H = 90^\circ$, $\cos B = \frac{a_c}{a} = \frac{BH}{BC}$

6. $\triangle ABC$: $\angle C = 90^\circ$, $\cos B = \frac{a}{c} = \frac{BC}{AB}$

7. $\frac{BH}{BC} = \frac{BC}{AB}$ отсюда $BC^2 = BH \cdot AB$

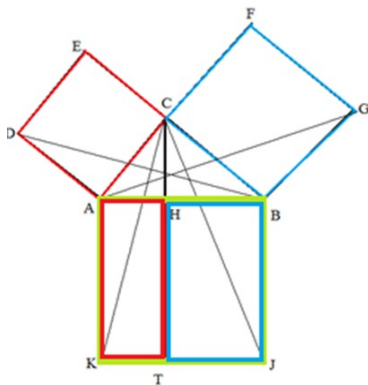
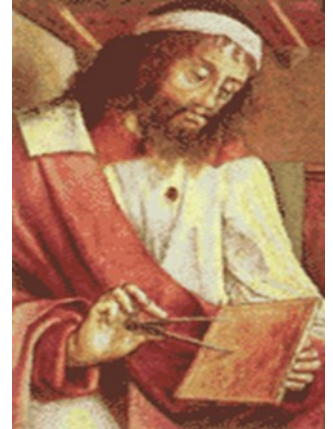
$$a^2 = a_c \cdot c$$

$$a^2 + b^2 = b_c \cdot c + a_c \cdot c$$

$$a^2 + b^2 = c (b_c + a_c)$$

$$a^2 + b^2 = c^2$$

6. Только одно доказательство теоремы Пифагора нам не известно: доказательство самого Пифагора. Долгое время считалось, что доказательство Евклида и есть доказательство Пифагора, но теперь считают, что это доказательство принадлежит **Евклиду**.



1. Рассмотрим $\triangle ABC$: $\angle C = 90^\circ$

$AB = c$, $BC = a$, $AC = b$.

$CH = h$, $AH = bc$ – проекция катета b на гипотенузу.

$BH = ac$ – проекция катета a на гипотенузу

2. На сторонах $\triangle ABC$ построим квадраты со сторонами a , b , c .

Проведем луч $CH \perp AB$ – гипотенузе.

Луч CH делит квадрат $ABJK$ на два прямоугольника $AHCK$ и $BHTN$.

Очевидно, что $S_{\square} = S_{\square} + S_{\square} = S_{\square}b + S_{\square}a$, т.е. $S_{\square ABJK} = S_{\square AHCK} + S_{\square BHTN}$

3. Рассмотрим вспомогательные треугольники: $\triangle ACK$ и $\triangle ABD$

$$AK = AB = c, AC = AD = b$$

$$\angle CAK = 90^\circ + \angle CAB = \angle DAB$$

$\triangle ACK = \triangle ABD$ (по двум сторонам и углу между ними).

$$S_{\triangle ACK} = S_{\triangle ABD}$$

$$\frac{1}{2}c \cdot bc = \frac{1}{2}(b) \cdot b$$

$$\frac{1}{2}S_{\square} = \frac{1}{2}b^2$$

$$\frac{1}{2}S_{\square} = \frac{1}{2}(b)S_{\square}b$$

$$S_{\square} = S_{\square}b$$

4. Аналогично можно доказать, что $S_{\square} = S_{\square}a$

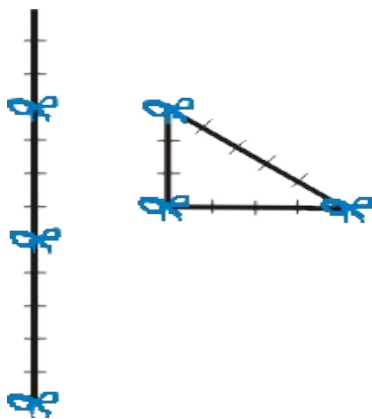
$$5. S_{\square c} = S_{\square} + S_{\square}$$

$$S_{\square c} = S_{\square a} + S_{\square b}$$

$$c^2 = a^2 + b^2$$

7. К настоящему моменту историки математики обнаружили, что теорема Пифагора не была открыта Пифагором – ее знали в разных странах задолго до древнегреческого философа и математика родом с острова Самос, жившего в VI веке до н.э.

Согласно сирийскому историку Ямвлиху, Пифагора познакомили с учителем математики Фалесом Милетским и его учеником Анаксимандром. После известно, что Пифагор отправился в Египет для продолжения своих исследований, был захвачен во время вторжения Камбиса II из Персии в 525



году до н. э. и доставлен в Вавилон. Пифагор вскоре поселился в Кротоне (ныне Кротон, Италия) и основал школу или, говоря современным языком, монастырь, где все члены дали строгий обет хранить тайну, а все новые математические результаты на протяжении нескольких столетий приписывались его имени. Таким образом, до конца неизвестно первое доказательство

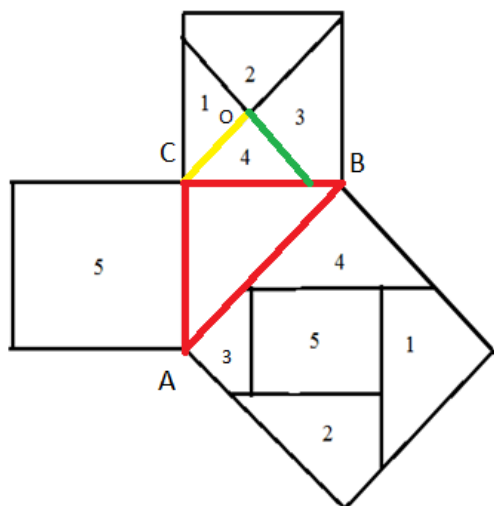
теоремы, а также есть некоторые сомнения в том, что сам Пифагор действительно ее доказал. Она была одной из первых теорем, пришедших из древних цивилизаций.

8. Крупнейший историк математики Мориц Кантор разглядел папирус из Берлинского музея и обнаружил, что равенство три в квадрате плюс четыре в квадрате равно пяти в квадрате.

Египетский треугольник

Кантор (крупнейший немецкий историк математики) считает, что равенство: $3^2 + 4^2 = 5^2$ было известно уже египтянам еще около 2300 г. до н. э., во времена царя Аменемхета I. По мнению Кантора гарпедонапты, или "натягиватели веревок", строили прямые углы при помощи прямоугольных треугольников со сторонами **3, 4 и 5**.

Очень легко можно воспроизвести их способ построения. Возьмем веревку длиною в 12м и привяжем к ней по цветной полоске на расстоянии 3м от одного конца и 4м от другого. Прямой угол окажется заключенным между сторонами длиной в 3 и 4 метра.



9. «В день, когда Пифагор открыл свой чертёж знаменитый, Славную он за него жертву быками воздвиг».

Существует легенда, что когда Пифагор Самосский доказал свою теорему, он отблагодарил богов, принеся в жертву 100 быков. Также о гипнотических способностях учёного ходили легенды: будто он одним своим взглядом мог менять направление полёта птиц. А ещё

рассказывали, что этого удивительного человека одновременно видели в разных городах, между которыми было несколько дней пути. И что ему якобы принадлежало «колесо фортуны», вращая которое, он не только предсказывал будущее, но и вмешивался, если это было необходимо, в ход событий.

Со слов неизвестного древнего стихотворца легенда о гекатомбе – жертвоприношении ста быков пошла гулять по умам и страницам изданий. Остряки шутят, что с тех самых пор все скоты боятся нового.

10. Доказательство, основанное на разрезании квадратов («колесо с лопастями» - Перигаль)

Этот метод основан на разрезании квадратов, построенных на катетах, на фигуры, из которых можно сложить квадрат, построенный на гипотенузе.

О – центр квадрата, построенного на большем катете (см. рис.)

Через т. О проводят прямую, параллельную гипотенузе и прямую, перпендикулярную гипотенузе. Квадрат разрезают. Его части и второй квадрат укладывают на квадрат, построенный на гипотенузе.

Вывод: легко видеть, что сумма площадей квадратов, построенных на катетах, равна площади квадрата, построенного на гипотенузе.

6. Практическое применение

Теорема Пифагора находит применение не только в математике, но и в астрономии и даже литературе. В математике теорему используют для решения задач, для доказательства других теорем. Что касается литературы, то теорема Пифагора вдохновляла писателей со времен античности и продолжает это делать в наше время. А в двадцатом веке советский писатель Евгений Велтистов в книге «Приключения Электроника» доказательством теоремы Пифагора отвел целую главу. И еще полглавы рассказу о двухмерном мире, какой мог бы существовать, если бы теорема Пифагора стала основополагающим законом и даже религией для отдельно взятого мира. Жить в нем было бы гораздо проще, но и гораздо скучнее: например, там никто не понимает значения слов «круглый» и «пушистый». А еще в книге «Приключения Электроника» автор устами учителя математики Таратара говорит: «Главное в математике – движение мысли, новые идеи». Именно этот творческий полет мысли порождает теорема Пифагора – не зря у нее столько разнообразных доказательств. Она помогает выйти за границы привычного, и на знакомые вещи посмотреть по-новому.

7. Заключение

Теорема Пифагора – это одно из двух имеющихся в геометрии сокровищ. И за эту ценность мы должны быть благодарны Пифагору – великому человеку, основоположнику современной математики. Именно он воспитал в человечестве веру в могущество разума, убежденность в познаваемости природы, уверенность в том, что ключом к тайнам мироздания является математика.

Значение ее в том, что с ее помощью можно вывести большинство теорем геометрии, например: в стереометрии (10 класс) при доказательстве теоремы о трех перпендикулярах, при доказательстве теоремы о квадрате диагонали прямоугольного параллелепипеда. Она замечательна еще тем, что сама по себе она вовсе не является очевидной. Например, свойства равнобедренного

треугольника, ромба можно увидеть непосредственно на чертеже. Но сколько ни смотри на прямоугольный треугольник, никак не увидишь, что квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов. Теорема Пифагора популярна по трем причинам:

1. простота;
2. красота;
3. значимость.

Занимаясь теоремой Пифагора, учащиеся узнали историю ее открытия, узнали больше 10 способов доказательства, разобралась в них. Некоторые из них простые, легко воспринимаются. А некоторые сложны в решении.

Теорема Пифагора получила много различных названий: «теорема бабочки», «теорема невесты», теорема «100 быков», «бегство убогих», «ветренная мельница», «мост ослов». Думаю, только по количеству названий, теореме можно считать уникальной!

8. Используемая литература

1. Интернет-ресурсы.
2. 100UROKOV.RU
3. Г.И. Глейзер - История математики в школе VII-VIII классы, пособие для учителя.
4. В.Литцман. Теорема Пифагора, М. 1960г.
5. А.В. Волошинов «Пифагор» М. 1993г.

Аннотация

Теорема Пифагора по праву считается самой важной в курсе геометрии и заслуживает пристального внимания. Она является основой решения множества геометрических задач, базой для изучения теоретического и практического курса геометрии в дальнейшем. Теорема окружена историческим материалом, связанным с её появлением и способами доказательства. Изучение истории развития геометрии прививает любовь к данному предмету, способствует развитию познавательного интереса, общей культуры и творчества, а так же развивает навыки научно-исследовательской работы.

В результате поисковой деятельности была достигнута цель работы, заключающаяся в пополнении и обобщении знаний по доказательству теоремы Пифагора. Удалось найти и рассмотреть различные способы доказательства и углубить знания по теме, выйдя за страницы школьного учебника.

Собранный материал ещё больше убеждает в том, что теорема Пифагора является великой теоремой геометрии, имеет огромное теоретическое и практическое значение.

Актуальность работы

Трудно найти выпускника, для которого имя Пифагора не ассоциировалось с его теоремой. Почти у каждого сохранились воспоминания о «пифагоровых штанах» - квадрате на гипотенузе, равновеликом двум квадратам на катетах. Причина такой популярности теоремы Пифагора очевидна: простота, красота и широкая значимость. В самом деле, теорема Пифагора проста, но не очевидна. Это сочетание двух противоречивых начал и придает ей особую притягательную силу,

В книге «Приключения Электроника» автор устами учителя математики Таратара говорит: «Главное в математике – движение мысли, новые идеи».

Именно этот творческий полет мысли порождает теорема Пифагора – не зря у нее столько разнообразных доказательств. Она помогает выйти за границы привычного, и на знакомые вещи посмотреть по-новому.