

**Методические рекомендации**  
по выполнению внеаудиторных самостоятельных работ  
учебного предмета ОУП.04 Математика для обучающихся 1 курса, осваивающих  
программы подготовки специалистов среднего звена по специальности  
**08.02.04 Водоснабжение и водоотведение**

**Форма подготовки:** очная

**СОДЕРЖАНИЕ**

1	Введение	Стр. 2
2	Пояснительная записка	Стр. 2
3	Советы по организации самостоятельной работы	Стр. 3
4	Перечень заданий	Стр. 4
5	Задания для самостоятельной работы	Стр. 5
6	Критерии оценки	Стр. 33

## **Введение**

Самостоятельная работа является важной частью учебного процесса, и значение ее в перспективе должно возрастать.

Проблема эффективности самостоятельной работы обучающихся сохраняет свою актуальность в педагогике длительное время. Одни авторы рассматривают самостоятельную работу как метод обучения, вторые — как одно из средств обучения, третьи — как форму организации познавательной деятельности. Одни преподаватели считают, что: „Самостоятельная работа обучающихся, включаемая в процессе обучения, — это такая работа, которая выполняется без непосредственного участия преподавателя, но по его заданию в специально предоставленное для этого время". Другие отмечают: „...самостоятельная работа в системе учебного процесса должна рассматриваться и как средство обучения, и как форма учебно-научного познания". При раскрытии сущности самостоятельной работы третьи выделяют следующие признаки: «Обучающийся ведет ее сам, без прямой посторонней помощи; он опирается на собственные знания, умения, убеждения, жизненный опыт, мировоззрения, выражая при этом личное отношение, собственную аргументацию, инициативу, творческое начало; содержание работы — образовательное, воспитательное, логически развивающее мышление и положительные качества ученика».

Самостоятельная работа обучающихся проводится с целью:

- систематизации и закрепления полученных теоретических знаний и практических умений студентов;
- углубления и расширения теоретических знаний;
- формирования компетенций, умений использовать нормативную, правовую, справочную документацию и специальную литературу;
- развития познавательных способностей и активности студентов: творческой инициативы, самостоятельности, ответственности и организованности;
- формирования самостоятельности мышления, способностей к саморазвитию, самосовершенствованию и самореализации;
- развития исследовательских умений.

Критериями оценки результатов внеаудиторной самостоятельной работы, обучающихся являются:

- уровень освоения студентом учебного материала;
- умения студента использовать теоретические знания при выполнении практических задач;
- сформированность учебных умений;
- оформление материала в соответствии с требованиями.

## **ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА**

Сборник внеаудиторной самостоятельной работы обучающихся(СРС) разработан на основе рабочей программы учебного предмета «Математика», разработанной на основе примерной программы учебного предмета «Математика» по специальностям среднего профессионального образования: Цели внеаудиторной СРС:

Цели самостоятельной внеаудиторной работы обучающихся:

- 1) закрепление, углубление, расширение и систематизация знаний, полученных во время аудиторных занятий, самостоятельное овладение новым учебным материалом;
- 2) формирование общепрофессиональных умений;
- 3) формирование умений и навыков самостоятельного умственного труда;
- 4) развитие самостоятельности мышления;
- 5) формирование убежденности, волевых черт характера, способности к самоорганизации.

Самостоятельная работа обучающихся рассчитана на 72 часа, включает в себя подготовку обучающихся к практическим занятиям, контрольным работам и экзамену.

Теоретический материал и решение типовых задач содержится в конспектах лекций и в учебниках (см. список литературы). учебников:

Основные источники:

1. Алимов Ш.А. и др. Алгебра и начала анализа. 10 -11 кл. общеобразовательных учреждений – М. Просвещение, 2013.
2. Атанасян Л.С. и др. Геометрия. 10 -11 кл. общеобразовательных учреждений – М.: Просвещение, 2015.
3. Башмаков М.И. Математика. Учебник для обучающихся в учреждениях начального и среднего профессионального образования. М.: Издательский центр “Академия”, 2014.
4. Башмаков М.И. Математика. Задачник для обучающихся в учреждениях начального и среднего профессионального образования. М.: Издательский центр “Академия”, 2014.
5. Башмаков М.И. Математика. Сборник задач для обучающихся в учреждениях начального и среднего профессионального образования. М.: Издательский центр “Академия”, 2014.

Дополнительные источники:

1. Колмогоров А.Н. и др. Алгебра и начала анализа. 10 (11) кл. общеобразовательных учреждений – М.: Просвещение, 2015.
2. Мордкович А. Г. Алгебра и начала математического анализа. 10-11 кл. Учебник и задачник для учащихся общеобразовательных учреждений. - М.: Мнемозина, 2013.
3. Погорелов А. В. Геометрия 10-11 кл. общеобразовательных учреждений - М.: Просвещение, 2015.
4. Семенко Е.А. Тематический сборник заданий для подготовки к ЕГЭ по математике. 10-11 кл. М.: Вентана-Граф, 2016.
5. Пехлецкий И.Д. Математика: Учебник для СПО. Рецензия №058 от 31 января 2014г. ФГАУ"ФИРО". - 13-е изд., стер. - М.: Академия, 2015.

Домашние самостоятельные работы содержат задачи повышенного уровня сложности. Они могут быть выполнены как индивидуально, так и группами учащихся по 2-4 человека.

### **СОВЕТЫ ПО ОРГАНИЗАЦИИ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ**

Время, которым располагает обучающийся для выполнения учебного плана, складывается из двух составляющих: одна из них - это работа в техникуме по расписанию занятий, другая - внеаудиторная самостоятельная работа. Задания и материалы для самостоятельной работы выдаются во время учебных занятий по расписанию, на этих же занятиях преподаватель осуществляет контроль за самостоятельной работой, а также оказывает помощь обучающимся по правильной организации работы. Чтобы выполнить весь объем самостоятельной работы, необходимо заниматься по 3 - 5 часов ежедневно. Начинать самостоятельные внеаудиторные занятия следует с первых же дней семестра, пропущенные дни будут потеряны безвозвратно, компенсировать их позднее усиленными занятиями без снижения качества работы и ее производительности невозможно. Первые дни семестра очень важны для того, чтобы включиться в работу, установить определенный порядок, равномерный ритм на весь семестр. Ритм в работе - это ежедневные самостоятельные занятия, желательно в одни и те же часы, при целесообразном чередовании занятий с перерывами для отдыха. Вначале для того, чтобы организовать ритмичную работу, требуется сознательное напряжение воли. Как только человек втянулся в работу, принуждение снижается, возникает привычка, работа становится потребностью. Таким образом, первая задача организации внеаудиторной самостоятельной работы - составление расписания, которое должно отражать время занятий. Расписание не предопределяет содержания работы, ее содержание неизбежно будет изменяться в течение семестра. Порядок же следует закрепить на весь семестр и приложить все усилия, чтобы поддерживать его неизменным. При однообразной работе человек утомляется больше, чем при работе разного характера. Однако не всегда целесообразно заниматься многими учебными дисциплинами в один и тот же день, так как при каждом переходе нужно вновь сосредоточить внимание, что может привести к потере времени. Наиболее целесообразно ежедневно работать не более чем над двумя-тремя дисциплинами. Начиная работу, не нужно стремиться делать вначале самую тяжелую ее часть, надо выбрать что-нибудь среднее по трудности, затем перейти к более трудной работе. И напоследок оставить легкую часть, требующую не столько больших интеллектуальных усилий, сколько определенных моторных действий (черчение, построение графиков и т.п.). Самостоятельные занятия требуют интенсивного умственного

труда, который необходимо не только правильно организовать, но и стимулировать. При этом очень важно уметь поддерживать устойчивое внимание к изучаемому материалу. Выработка внимания требует значительных волевых усилий. Именно поэтому, если студент замечает, что он часто отвлекается во время самостоятельных занятий, ему надо заставить себя сосредоточиться. Подобную процедуру необходимо проделывать постоянно, так как это - тренировка внимания. Устойчивое внимание появляется тогда, когда человек относится к делу с интересом. Следует правильно организовать свои занятия: 50 минут - работа, 5-10 минут - перерыв; после 3 часов работы перерыв - 20-25 минут. Иначе нарастающее утомление повлечет неустойчивость внимания. Очень существенным фактором, влияющим на повышение умственной работоспособности, являются систематические занятия физической культурой. Организация активного отдыха предусматривает чередование умственной и физической деятельности, что полностью восстанавливает работоспособность человека.

#### **Общие методические рекомендации для решения задач:** качественных:

Решение качественных задач включает три этапа: чтение условия, анализ задачи и решение.

1. При анализе содержания задачи необходимо использовать, прежде всего, общие алгоритмы решения по данной теме.
2. Выяснить, как конкретно должно быть объяснено то явление, которое описано в задаче.
3. Ответ к задаче получают как завершение проведенного анализа. В качественных задачах анализ условия тесно сливается с получением нужного обоснованного ответа.

#### количественных:

1. Внимательно прочитать текст задачи.
2. Кратко записать условие и сделать чертеж или схему.
3. При разборе задачи, прежде всего обратить внимание искомые элементы, зависимость между геометрическими или алгебраическими величинами.
4. Решение задачи необходимо сопровождать краткими пояснениями.
5. Вычисления следует производить рациональными приемами, используя законы и правила.
6. Ответ задачи рекомендуется.
7. Полученный ответ задачи необходимо проверить. Нужно обратить внимание на реальность ответа.

### **ПЕРЕЧЕНЬ ЗАДАНИЙ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ**

	Раздел(тема)учебного предмета	Самостояте льная работа (в часах)	Виды СРС
	<b>Раздел I Алгебра</b>		
1	Действительные числа.	4	Работа с конспектом лекций. Выполнение письменной домашней работы.
2	Степенная функция.	4	Работа с конспектом лекций.
3	Показательная функция.	4	Выполнение письменной домашней работы.
4	Логарифмическая функция.	4	Работа с конспектом лекций.
5	Тригонометрические формулы.	6	Выполнение письменной домашней работы.
6	Тригонометрические уравнения.	4	Работа с конспектом лекций.

7	Тригонометрические функции.	4	Выполнение письменной домашней работы.
	<b>Раздел II Геометрия</b>		
8	Параллельность прямых и плоскостей.	2	Выполнение письменной домашней работы.
9	Перпендикулярность прямых и плоскостей Движения.	2	Работа с конспектом лекций.
10	Понятие многогранника Призма. Пирамида. Правильные многогранники	2	Выполнение письменной домашней работы.
11	Цилиндр, Конус. Шар.	2	Работа с конспектом лекций.
12	Векторы в пространстве	4	Выполнение письменной домашней работы.
13	Метод координат в пространстве.	4	Работа с конспектом лекций.
14	Объёмы тел.	4	Выполнение письменной домашней работы.
	<b>Раздел III. Начала математического анализа</b>		
15	Производная и ее геометрический смысл	4	Выполнение письменной домашней работы.
16	Применение производной к исследованию функций	4	Работа с конспектом лекций.
17	Интеграл	4	Выполнение письменной домашней работы.
	<b>Раздел IV. Элементы теории вероятностей и математической статистики, комбинаторика</b>		
18	Комбинаторика	2	Выполнение письменной домашней работы.
19	Элементы теории вероятностей и математической статистики	2	Работа с конспектом лекций.
20	Повторение	6	Выполнение письменной домашней работы.

### Задания для самостоятельной работы

#### Раздел I Алгебра

##### Внеаудиторная самостоятельная работа. №1

Тема: «Действительные числа.»

Цель: Повторение и систематизация знаний.

Методические рекомендации.

#### Опр.

Арифметическим корнем натуральной степени  $n \geq 2$  из неотрицательного числа  $a$  называется

неотрицательное число,  $n$  – ая степень которого равна  $a$ .

#### **Примеры**

1.  $\sqrt[3]{64} = 4$ , так как  $4 > 0$  и  $4^3 = 64$       2.  $\sqrt[3]{125} = 5$ , так как  $5 > 0$  и  $5^3 = 125$

Из определения арифметического корня следует, что если  $a \geq 0$ , то  $(\sqrt[n]{a})^n = a$  и  $\sqrt[n]{a^n} = a$

#### **Свойства арифметического корня:**

Арифметический корень  $n$  – ой степени обладает следующими свойствами: если  $a \geq 0$ ,  $b \geq 0$  и  $n, m$  – натуральные числа, причём  $n \geq 2$ ,  $m \geq 2$ , то

$$1. \sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} \qquad 2. \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

$$3. (\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$$

$$4. \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$$

Корень нечётной степени из отрицательного числа  $a$  вычисляется следующим образом:

$$\sqrt[2k+1]{a} = -\sqrt[2k+1]{|a|}$$

$$\text{Например, } \sqrt[5]{-32} = -\sqrt[5]{2^5} = -2$$

Примеры применения свойств арифметического корня.

$$1. \sqrt[4]{27} \cdot \sqrt[4]{3} = \sqrt[4]{27 \cdot 3} = \sqrt[4]{81} = \sqrt[4]{3^4} = 3$$

$$2. \sqrt[3]{\frac{256}{625}} : \sqrt[3]{\frac{4}{5}} = \sqrt[3]{\frac{256}{625} : \frac{4}{5}} = \sqrt[3]{\frac{64}{125}} = \frac{4}{5}$$

$$3. \sqrt[7]{5^{21}} = \sqrt[7]{(5^3)^7} = 5^3 = 125$$

$$4. \sqrt[3]{\sqrt[4]{4096}} = \sqrt[12]{2^{12}} = 2$$

$$5. (\sqrt[4]{9})^{-2} = \sqrt[4]{9^{-2}} = \sqrt[4]{\frac{1}{81}} = \frac{1}{3}$$

#### Задания для самостоятельной работы

$$1. \text{Вычислить: а) } \sqrt[5]{3^{10} \cdot 2^{15}}; \text{ б) } \sqrt[4]{3^{12} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^8}; \text{ в) } 27^{\frac{2}{3}}; \text{ г) } 9^{\frac{2}{3}} : 9^{\frac{1}{6}}; \text{ д) } 150^{\frac{3}{2}} : 6^{\frac{3}{2}};$$

$$\text{е) } \left(\frac{1}{16}\right)^{-0,75} + 810000^{0,25} - \left(7\frac{19}{32}\right)^{\frac{1}{5}}$$

$$2. \text{Упростить выражение: а) } (\sqrt[3]{y^2})^3; \text{ б) } (\sqrt[3]{a^2} \cdot \sqrt[4]{b^3})^{12}; \text{ в) } a^{\frac{1}{3}} \cdot \sqrt{a}; \text{ г) } a^{\frac{4}{3}} : \sqrt[3]{a};$$

$$3. \text{Вычислить: а) } \frac{\sqrt[4]{32}}{\sqrt[4]{2}} + \sqrt[6]{27^2} - \sqrt[3]{64}; \text{ б) } \sqrt[3]{11 - \sqrt{57}} \cdot \sqrt[3]{11 + \sqrt{57}}; \text{ в) } \left(\sqrt[3]{128} + \sqrt[3]{\frac{1}{4}}\right) : \sqrt[3]{2}$$

$$\text{г) } 3^{1+2\sqrt{2}} : 9^{\sqrt{2}}; \text{ д) } (25^{1+\sqrt{2}} - 5^{2\sqrt{2}}) \cdot 5^{-1-2\sqrt{2}};$$

$$4. \text{Упростить выражение: } \sqrt[3]{\sqrt[3]{a^{18}}} + \left(\sqrt{\sqrt[3]{a^4}}\right)^3$$

$$5. \text{Упростить выражение: а) } \frac{x-y}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} - \frac{x-y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}; \text{ б) } \frac{a^{\frac{1}{4}} - a^{\frac{4}{9}}}{a^{\frac{1}{4}} - a^{\frac{5}{4}}} - \frac{b^{-\frac{1}{2}} - b^{\frac{3}{2}}}{b^{\frac{1}{2}} + b^{-\frac{1}{2}}}$$

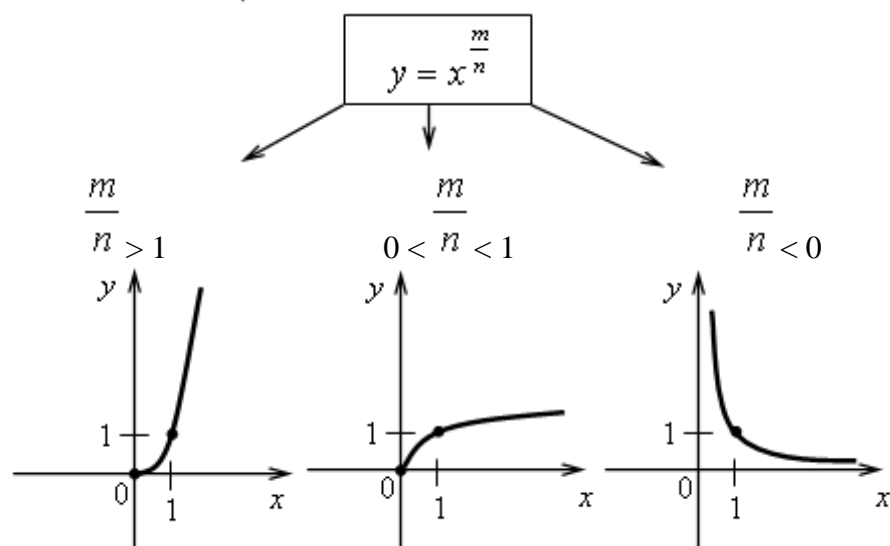
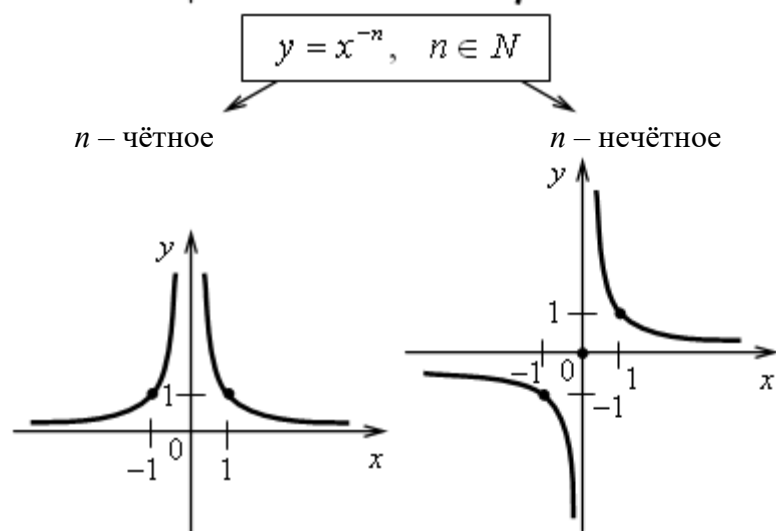
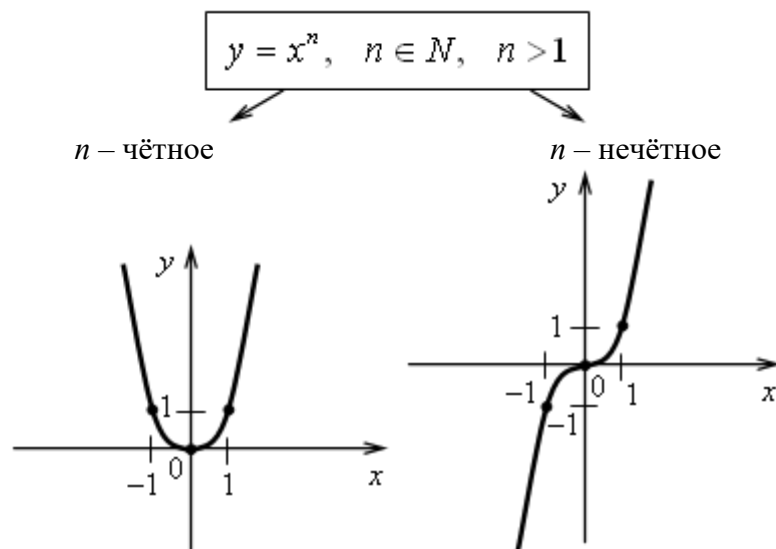
$$6. \text{Сравнить числа: а) } 2^{\sqrt{3}} \text{ или } 2^{1,7}; \text{ б) } \left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{3}} \text{ или } \left(\frac{1}{2}\right)^{1,7}; \text{ в) } 0,88^{\frac{1}{6}} \text{ или } \left(\frac{6}{11}\right)^{\frac{1}{6}}; \text{ г) } \left(\frac{1}{12}\right)^{-\frac{1}{4}} \text{ или } (0,41)^{-\frac{1}{4}}$$

#### Внеаудиторная самостоятельная работа. №2

Тема: «Степенная функция.»

Цель: Повторение и систематизация знаний.

Методические рекомендации.



Опр.

Уравнения, в которых неизвестная содержится в знаменателе дроби, называются рациональными.

Рациональные уравнения решают следующим образом, надо:

- 1) найти общий знаменатель дробей, входящих в уравнение;
- 2) заменить данное уравнение целым, умножив обе части на общий знаменатель;
- 3) решить получившееся уравнение;
- 4) исключить из него те корни, которые обращают в нуль общий знаменатель

Пример

$$\frac{5+2x}{4x-3} = \frac{3 \cdot (x+1)}{7-x}$$

$$\frac{5+2x}{4x-3} = \frac{3 \cdot (x+1)}{7-x} \quad | \cdot (4x-3) \cdot (7-x)$$

$$\frac{5+2x}{4x-3} = \frac{3 \cdot (x+1)}{7-x} \quad | \cdot (4x-3) \cdot (7-x)$$

$$(5+2x) \cdot (7-x) = (3x+3) \cdot (4x-3)$$

$$-14x^2 + 6x + 44 = 0$$

$$14x^2 - 6x - 44 = 0$$

$$x_1 = 2 \quad x_2 = -5,5$$

Проверка:

$$x = 2 \quad 4 \cdot 2 - 3 = 5 \neq 0 \quad 7 - 2 = 5 \neq 0$$

$$x = -5,5 \quad 4 \cdot (-5,5) - 3 = -25 \neq 0 \quad 7 - (-5,5) = 7 + 5,5 = 12,5$$

Ответ:  $x_1 = 2 \quad x_2 = -5,5$

Опр.

Уравнения, в которых переменная находится под знаком корня, называются иррациональными. Для решения иррационального уравнения надо левую и правую части уравнения возвести в  $n$ -ую степень, равную показателю корня

Пример

1. Решение уравнения  $\sqrt{1+3x} = 1-x$  методом возведения в квадрат обеих частей уравнения.

$$(\sqrt{1+3x})^2 = (1-x)^2;$$

$$1+3x = x^2 - 2x + 1;$$

$$x^2 - 5x = 0.$$

Решив это уравнение, находим корни  $x_1 = 0, x_2 = 5$ .

Проверка: если  $x = 0$ , то  $\sqrt{1+3 \cdot 0} = 1-0$ ,  $1 = 1$  – верно;

если  $x = 5$ , то  $\sqrt{1+3 \cdot 5} = 1-5$ ,  $4 = 4$  – неверно.

Ответ:  $x = 0$ .

Задания для самостоятельной работы

1. Функции какого вида называют степенными?

- Перечислите свойства функции  $y = x^{\frac{m}{n}}$ , если  $\frac{m}{n} > 1$ ;  $0 < \frac{m}{n} < 1$ ;  $\frac{m}{n} < 0$ .  
– Для каждой из перечисленных функций найдите изображение её графика.

а)  $y = x^{\frac{2}{7}}$ ;

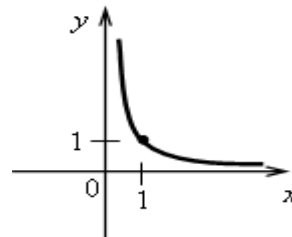
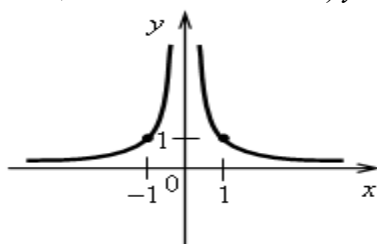
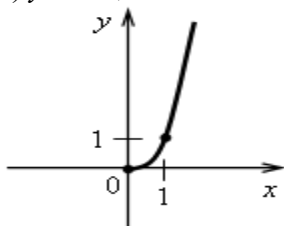
б)  $y = x^4$ ;

в)  $y = x^{-9}$ ;

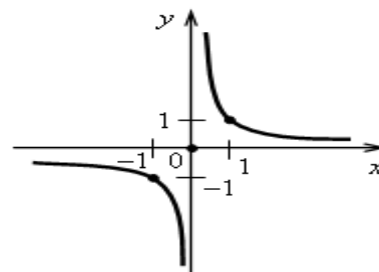
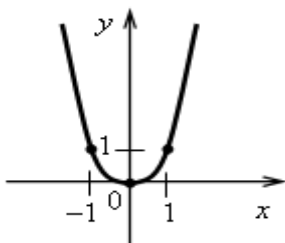
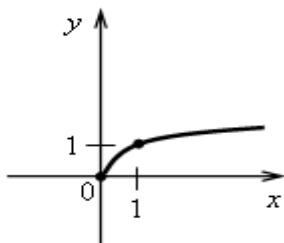
г)  $y = x^{\frac{4}{3}}$ ;

д)  $y = x^{0,7}$ ;

е)  $y = x^{-6}$ .







### 1 вариант

2. Решить уравнение: а)  $\frac{2x+1}{x} + \frac{4x}{2x+1} = 5$ ; а)  $\frac{6x-x^2-6}{x-1} - \frac{2x-3}{x-1} = 1$ ;

в)  $\frac{2x+1}{x} + \frac{4x}{2x+1} = 5$

3. Решить уравнение: а)  $\sqrt{x+7} + \sqrt{x-2} = 9$ ; б)  $\sqrt{x^2+2x+10} = 2x-1$

в)  $x-5 = \sqrt{x+1}$

### Внеаудиторная самостоятельная работа. №3

Тема: «Показательная функция.»

Цель: Повторение и систематизация знаний.

Методические рекомендации.

**Показательное уравнение** – это уравнение, в котором неизвестное содержится в показателе степени

**Решение показательных уравнений. Метод выноса за скобки**

Образцы решения.

1. Решить уравнение:  $3^{x+1} - 2 \cdot 3^{x-2} = 25$

В левой части выносим за скобки степень с наименьшим показателем, то есть  $3^{x-2}$ . В результате получим:

$$3^{x-2} \left( \frac{3^{x+1}}{3^{x-2}} - \frac{2 \cdot 3^{x-2}}{3^{x-2}} \right) = 25$$

$$3^{x-2} (3^{x+1-(x-2)} - 2) = 25$$

$$3^{x-2} (3^{x+1-x+2} - 2) = 25$$

$$3^{x-2} (3^3 - 2) = 25$$

$$3^{x-2} \cdot 25 = 25$$

$$3^{x-2} = 1, \quad 3^{x-2} = 3^0, \quad \text{отсюда следует, что } x = 2.$$

Ответ:  $x = 2$ .

**Уравнения, сводящиеся к квадратным (метод замены)**

Образцы решения.

1. Решить уравнение:  $4^x + 2^{x+1} - 24 = 0$ .

Решение: Заметив, что  $4^x = (2^2)^x = 2^{2x} = (2^x)^2$ , а  $2^{x+1} = 2 \cdot 2^x$

Перепишем заданное уравнение в виде:

$$(2^x)^2 + 2 \cdot 2^x - 24 = 0$$

Вводим новую переменную:  $t = 2^x$ , тогда уравнение примет вид:

$$t^2 + 2t - 24 = 0$$

Решив квадратное уравнение, получим:  $t_1 = 4$ ,  $t_2 = -6$ . Но так как  $t = 2^x$ , то надо решить два уравнения:

$$2^x = 4 \quad \text{и} \quad 2^x \neq -6$$

Решим первое уравнение:

$$2^x = 2^2 \text{ отсюда следует, что } x = 2.$$

Рассмотрим второе уравнение.

Второе уравнение не имеет решения, так как  $2^x > 0$  для любых значений  $x$ .

Ответ: 2.

### Образцы решения показательных неравенств

1. Решить неравенство  $2^x - 2^{x-2} \leq 3$ .

Решение:

Выносим за скобки степень с наименьшим показателем, т.е.  $2^{x-2}$ .

$$\text{Получим: } 2^{x-2}(2^2 - 1) \leq 3,$$

$$2^x \cdot 3 \leq 3,$$

$$2^x \leq 1, \quad \text{так как } 2^0 = 1 \text{ то}$$

$$2^x \leq 2^0$$

Так как основание  $2 > 1$ , то неравенство равносильно неравенству того же смысла  $x \leq 0$ .

Ответ:  $x \in (-\infty; 0]$ .

2. Решить неравенство  $7^{2x} - 8 \cdot 7^x + 7 > 0$

Решение.

Заменим:  $7^x = t, t > 0$ ;

Получим неравенство:  $t^2 - 8t + 7 > 0$ . Трехчлен  $t^2 - 8t + 7$  разложим на множители:

$$(t - 7)(t - 1) > 0.$$

$$t < 7; t > 1.$$

$$7^x < 7, \quad a = 7 > 1, \text{ то } x < 1$$

$$7^x > 1, \quad 7^x > 7^0, \quad a = 7 > 1, \text{ то } x > 0.$$

Ответ:  $x \in (-\infty; 1) \cup (0; \infty)$ .

### Степени чисел от 0 до 10

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$2^n$	1	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024
$3^n$	1	3	9	27	81	243	729	2187	6561	19683	59049
$4^n$	1	4	16	64	256	1024	4096	16384	65536	262144	
$5^n$	1	5	25	125	625	3125	15625	78125	390625		
$6^n$	1	6	36	216	1296	7776	46656	279936			
$7^n$	1	7	49	343	2401	16807	117649				
$8^n$	1	8	64	512	4096	32768					
$9^n$	1	9	81	729	6561	59049					
$10^n$	1	10	100	1000	10000						

### Решение квадратных уравнений:

$$a \cdot x^2 + bx + c = 0$$

$$D = b^2 - 4ac,$$

$$\text{Если } D > 0, \text{ то } x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$$

$$\text{Если } D = 0, \text{ то } x = \frac{-b}{2a}$$

Если  $D < 0$ , то корней нет

### Формулы сокращенного умножения:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$a^2 - b^2 = (a - b) \cdot (a + b)$$

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

Задания для самостоятельной работы

1. Решить уравнения:

1)  $8^x = 64$ ; 2)  $2^{x+1} = 32$ ; 3)  $7^x = \frac{1}{343}$ ; 4)  $\left(\frac{4}{5}\right)^x = \frac{25}{16}$ ; 5)  $3^{-1-x} = \left(\frac{1}{3}\right)^{2x+3}$ ; 6)  $3^{2x} - 6 \cdot 3^x - 27 = 0$   
 7)  $0,5^x = 0,125$ ; 8)  $3^{x-2} = 81$ ; 9)  $\left(\frac{1}{6}\right)^x = 36$ ; 10)  $\left(\frac{3}{2}\right)^x = \frac{16}{81}$ ; 11)  $\left(\frac{1}{6}\right)^{4x-7} = 6^{x-3}$ ;

2. Решить неравенства:

1)  $4^{5x-1} > 16^{3x+2}$ ; 2)  $11^{2x^2+3x} \leq 121$ ; 3)  $0,9^{x^2-4x} < \left(\frac{10}{9}\right)^3$ ; 4)  $0,5^{4x+3} \geq 0,5^{6x-1}$ ; 5)  $7^{x^2-5x} < \left(\frac{1}{7}\right)^6$ ; 6)

$14^{x^2+x} \leq 196$ .

**Внеаудиторная самостоятельная работа. №4**

**Тема:** «Логарифмическая функция.»

**Цель:** Повторение и систематизация знаний.

**Методические рекомендации.**

Логарифмическая функция непрерывна и строго возрастает (если основание  $a > 1$ ) или строго убывает (если  $a < 1$ ) на всей области определения. Множество ее значений – все действительные числа.

Так как логарифмическая и показательная функции взаимно обратны, то при  $a > 0$ ,  $a \neq 1$ ,

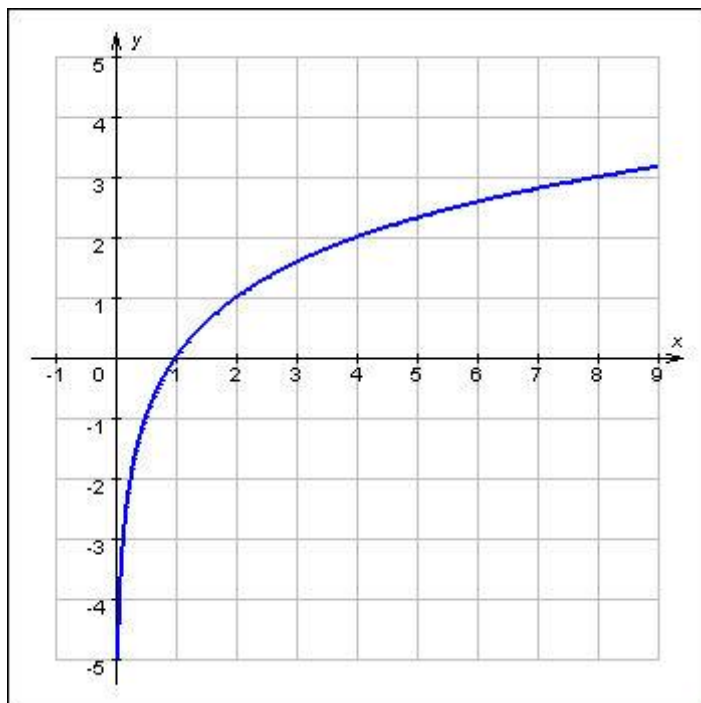


График 2.4.4.1.

График логарифмической функции  $y = \log_2 x$ .

$$\begin{aligned} a^{\log_a x} &= x, & x > 0 \\ \log_a a^x &= x, & x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Ниже приведены некоторые свойства логарифмов

$(x > 0, x_1 > 0, x_2 > 0,$

$a > 0, a \neq 1, b > 0, b \neq 1, \alpha \in \mathbb{R}).$

$$\log_a (x_1 x_2) = \log_a x_1 + \log_a x_2,$$

$$\log_a \frac{x_1}{x_2} = \log_a x_1 - \log_a x_2,$$

$$\log_a x^a = a \log_a x,$$

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a},$$

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a},$$

$$\log_{a^\alpha} x = \frac{1}{\alpha} \log_a x, \quad \alpha \neq 0.$$

**Опр.**

Уравнения, содержащие неизвестное под знаком логарифма, называются логарифмическими.

Такие уравнения решаются с помощью определения логарифма, теорем о логарифмах и утверждения, что если положительные числа равны, то и равны их логарифмы при данном основании и обратно, если логарифмы чисел равны, то равны и соответствующие им числа. Во всех случаях полученные решения необходимо проверить подстановкой их в данное уравнение

и исключить посторонний корень. Часто используется формула перехода от одного основания

$$\text{к другому } \log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

Пример Решить уравнение  $\log_2(x+1) + \log_2(x+3) = 3$

Решение

$$\log_2(x+1) + \log_2(x+3) = 3 \quad 3 = \log_2 8$$

$$\log_2(x+1) + \log_2(x+3) = \log_2 8$$

$$(x+1) \cdot (x+3) = 8$$

$$x^2 + 4x + 3 = 8$$

$$x^2 + 4x - 5 = 0$$

$$x_1 = 1, \quad x_2 = -5$$

Проверка

$x = 1 \quad \log_2(1+1) + \log_2(1+3) = \log_2 2 + \log_2 4 = 1 + 2 = 3$  - левая часть  $3=3 \Rightarrow x = 1$  - корень уравнения

$x = -5 \quad \log_2(-5+1) + \log_2(-5+3) = \log_2(-4) + \log_2(-2)$  - левая часть не имеет смысла  $\Rightarrow x = -5$  не является корнем

Ответ:  $x = 1$

При решении простейших логарифмических неравенств типа  $\log_a x > \log_a b$  необходимо использовать следующее правило:

Если  $a > 1$ , то знак неравенства не меняется, т.е.  $x > b$

Если  $0 < a < 1$ , то знак неравенства меняется на противоположный, т.е.  $x < b$ .

При решении логарифмических неравенств необходимо проверить, входит ли полученное решение в область определения неравенства.

Пример Решить неравенство  $\lg(x+1) \leq 2$

Решение

$$\lg(x+1) \leq 2 \quad 2 = \lg 100$$

$$\lg(x+1) \leq \lg 100$$

$$a = 10, \quad a > 1 \Rightarrow x+1 \leq 100$$

$$x \leq 99$$

Область определения:  $x+1 > 0$

$x > -1$

Общее решение:  $\begin{cases} x \leq 99, \\ x > -1 \end{cases} \Rightarrow -1 < x \leq 99$  Ответ:  $-1 < x \leq 99$

### Задания для самостоятельной работы

Разбор и анализ лекционного материала по теме.

Выполнение практической работы.

**1** Вычислить:

$$1) \log_8 12 + \log_{\frac{1}{8}} 3; 2) \log_4 5 \cdot \log_5 6 \cdot \log_6 7 \cdot \log_7 8; 3) \log_3 49 \cdot \log_{\sqrt{7}} 5 \cdot \log_{25} 27;$$

$$4) \frac{\log_9 32}{\log_9 4}; 5) \frac{\log_{\sqrt[3]{5}} 27}{\log_{25} \sqrt{3}}; 6) 6^{\frac{\log_3 5}{1+\log_3 2}}; 7) \frac{\log_2 18}{\log_{36} 2} - \frac{\log_2 9}{\log_{72} 2};$$

**2.** Решить уравнения:

$$1) \log_2(4-x) = 2; 2) \log_{\frac{1}{4}}(x-3) = -1; 3) \log_2(x^2 - 3x - 10) = 3; 4) \log_{\frac{1}{7}}(x^2 + x - 5) = -1;$$

$$5) \log_{0,3}(-x^2 + 5x + 7) = \log_{0,3}(10x - 7); 6) \log_2^2 x - 4 \log_2 x + 3 = 0;$$

$$7) \log_2^2 x - 7 \log_2 x + 12 = 0;$$

3. Решить логарифмическое неравенство.

$$1) \log_2 x \geq 4; 2) \log_{\frac{1}{2}} x \leq -3; 3) \lg x > 2; 4) \log_5 x > \log_5(3x - 4); 5) \log_3(8 - 6x) \leq \log_3 2x; 6)$$

$$\log_{\frac{1}{3}}(5x - 9) \geq \log_{\frac{1}{3}} 4x; 7) \log_2(5x - 9) \leq \log_2(3x + 1);$$

**Внеаудиторная самостоятельная работа. №5**

Тема: «Тригонометрические формулы.»

Цель: Повторение и систематизация знаний.

Методические рекомендации.

**Основные формулы тригонометрии**

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1;$$

$$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x;$$

$$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x;$$

**Синус и косинус суммы и разности аргументов:**

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \sin \beta \cos \alpha$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$$

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta}$$

**Формулы двойного аргумента:**

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$\cos 2\alpha = (\cos \alpha)^2 - (\sin \alpha)^2$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \cdot \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}$$

**Формулы понижения степени:**

$$(\sin \alpha)^2 = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$$

$$(\cos \alpha)^2 = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}$$

**Преобразование сумм тригонометрических функций в произведение:**

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2}$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\operatorname{tg} \alpha \pm \operatorname{tg} \beta = \frac{\sin(\alpha \pm \beta)}{\cos \alpha \cdot \cos \beta}$$

$\alpha$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\pi$	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	$2\pi$
----------	---	-----------------	-----------------	-----------------	-----------------	------------------	------------------	------------------	-------	------------------	------------------	------------------	------------------	------------------	------------------	-------------------	--------

$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\operatorname{tg} \alpha$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	-	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	-	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0
$\operatorname{ctg} \alpha$	-	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	-1	$-\sqrt{3}$	-	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	-1	$-\sqrt{3}$	-

### Задания для самостоятельной работы

1 Разбор и анализ лекционного материала по теме.

2 Выполнение практической работы.

1. Выразить в радианах: 1)  $150^\circ$ ; 2)  $180^\circ$ ; 3)  $210^\circ$ ; 4)  $225^\circ$ ; 5)  $270^\circ$ ; 6)  $330^\circ$ .

2. Выразить в градусах: 1)  $\frac{21\pi}{4}$ ; 2)  $-\frac{31\pi}{6}$ ; 3)  $\frac{101\pi}{12}$ ; 4)  $\frac{5\pi}{36}$ ; 5)  $\frac{13\pi}{30}$ ; 6)  $\frac{11\pi}{18}$ .

3. Вычислить:

1)  $\sin(-\pi/6) - 2\operatorname{tg}(-\pi/4) + \cos(-\pi/3) - \operatorname{ctg}(-\pi/2)$ ;

2)  $\cos^3(-\pi/3) - \operatorname{ctg}^3(-\pi/6) + \sin^3(-\pi/6)$ ;

3)  $\frac{5 + \operatorname{ctg}^4(\pi/6) - \operatorname{tg}^2(\pi/4)}{\operatorname{ctg}(\pi/4) - 4\cos^2(\pi/3) - 8\sin^3(\pi/6)}$ .

4. Упростить: 1)  $(1 + \operatorname{tg}^2 \alpha) \cos^2 \alpha$ ; 2)  $(1 + \operatorname{tg}^2 \alpha)(1 - \cos^2 \alpha)$

3)  $\frac{\sin(\pi - \alpha) \sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)}{\cos(\alpha + 2\pi) \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)}$  4)  $\cos(1,5\pi - x) + \cos(0,5\pi - x) + \sin(0,5\pi - x)$

5. В какой четверти расположен угол  $\alpha$ , если:  $\alpha = 298^\circ$ ;  $\alpha = -72^\circ$ ;  $\alpha = \frac{2\pi}{7}$ ;  $\alpha = -\frac{9\pi}{8}$

**Внеаудиторная самостоятельная работа. №6**

Тема: «Тригонометрические уравнения.»

Цель: Повторение и систематизация знаний.

Методические рекомендации.

### Тригонометрические уравнения

$$\sin x = a \quad (|a| \leq 1) \Rightarrow x = (-1)^k \arcsin a + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

1.  $x_1 = \arcsin a + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$

2.  $x_2 = \pi - \arcsin a + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$

Частные случаи

$$\sin x = 0 \Rightarrow x = \pi k, \quad k \in \mathbb{Z},$$

$$\sin x = 1 \Rightarrow x = \pi/2 + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z},$$

$$\sin x = -1 \Rightarrow x = -\pi/2 + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

$$\cos x = a \quad (|a| \leq 1) \Rightarrow x = \pm \arccos a + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

3.  $x_1 = \arccos a + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$

4.  $x_2 = -\arccos a + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$

Частные случаи  $\cos x = 0 \Rightarrow x = \pi/2 + \pi k, k \in \mathbb{Z},$

$$\cos x = 1 \Rightarrow x = 2\pi k, k \in \mathbb{Z},$$

$$\cos x = -1 \Rightarrow x = \pi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

$$\operatorname{tg} x = a \Rightarrow x = \operatorname{arctg} a + \pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

5.

Частные случаи  $\operatorname{tg} x = 0 \Rightarrow x = \pi k, k \in \mathbb{Z},$

$$\operatorname{tg} x = 1 \Rightarrow x = \pi/4 + \pi k, k \in \mathbb{Z},$$

$$\operatorname{tg} x = -1 \Rightarrow x = -\pi/4 + \pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

$$\operatorname{ctg} x = a \Rightarrow x = \operatorname{arcc} \operatorname{tg} a + \pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

6.

Частные случаи  $\operatorname{ctg} x = 0 \Rightarrow x = \pi/2 + \pi k, k \in \mathbb{Z},$

$$\operatorname{ctg} x = 1 \Rightarrow x = \pi/4 + \pi k, k \in \mathbb{Z},$$

$$\operatorname{ctg} x = -1 \Rightarrow x = 3\pi/4 + \pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

## Задания для самостоятельной работы

Разбор и анализ лекционного материала по теме.

Выполнение практической работы.

1. Решите уравнения:

1)  $\sin(2x - \frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2}$ ; 2)  $2\cos(x - \frac{\pi}{4}) = 1$ ; 3)  $\sin^2 x - 6\sin x + 5 = 0$ .

4)  $\sin^2 x - 3\sin x \cos x + 2\cos^2 x = 0$ . 5)  $2\sin(x + \frac{\pi}{6}) = \sqrt{3}$ ; 6)  $\cos(\frac{\pi}{3} - 3x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ;

7)  $\sin^2 x - \cos^2 x = 1$ ; 8)  $6\sin^2 x + 11\sin x + 4 = 0$ . 9)  $2\sin^2 x + \sin 2x + \cos^2 x = 2,5$ .

### Внеаудиторная самостоятельная работа. №7

Тема: «Тригонометрические функции.»

Цель: Повторение и систематизация знаний.

Методические рекомендации.

#### Опр.

Областью определения функции называют множество всех значений, которые может принимать её аргумент (переменная  $x$ )

#### Опр.

Если функция задана формулой, то принято считать, что она определена при всех тех значениях аргумента, при которых эта формула имеет смысл, т.е. выполнимы все действия, указанные в выражении, стоящем в правой части формулы.

#### Опр.

Множеством значений функции называется множество всех значений, которые принимает функция (переменная  $y$ )

Пример Найти область определения функции  $y = \sqrt{x+1}$

Решение: обл. опр.  $x + 1 \geq 0$   
 $x \geq -1$

Ответ:  $D(y): x \geq -1$

#### Опр.

Функция  $y = f(x)$  называется чётной, если для всех  $x \in D(f)$  выполняется равенство  $f(-x) = f(x)$

#### Опр.

Функция  $y = f(x)$  называется нечётной, если для всех  $x \in D(f)$  выполняется равенство  $f(-x) = -f(x)$

Пример. Определить, является ли функция чётной или нечётной  $f(x) = x \cdot \sin x$

Решение  $f(-x) = (-x) \cdot \sin(-x) = -x \cdot (-\sin x) = x \cdot \sin x = f(x) \Rightarrow f(x) -$   
чётная

### **Опр.**

Функция  $y = f(x)$  называется периодической, если существует такое число  $T \neq 0$ , что для любого  $x$  из области определения этой функции выполняется равенство  $f(x-T) = f(x) = f(x+T)$ . Число  $T$  называется периодом функции  $f(x)$ .

Пример Доказать, что функция  $f(x) = \sin 3x$  периодическая с периодом  $\frac{2\pi}{3}$

Доказательство:  $f(x+T) = f\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) = \sin 3\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) = \sin(3x + 2\pi) = \sin 3x = f(x) \Rightarrow$

функция периодическая.

### **Задания для самостоятельной работы**

1. Разбор и анализ лекционного материала по теме.

2. Выполнение практической работы.

Построить график функции, используя простейшие виды преобразования графиков.

а)  $f(x) = \frac{1}{3} \sin x + 3$ ; б)  $f(x) = 2 \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$ ; в)  $f(x) = \frac{1}{2} \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + 1$ ;

Найдите для данной функции:

- 1) область определения;
- 2) множество значений;
- 3) наибольшее и наименьшее значения, при каких значениях  $t$  достигаются;
- 4) непрерывность;
- 5) период;
- 6) чётность/ нечётность;
- 7) нули функции;
- 8) промежутки знакопостоянства;
- 9) промежутки монотонности.

## **Раздел II Геометрия**

### **Внеаудиторная самостоятельная работа. №8**

Тема: «Параллельность прямых и плоскостей.»

Цель: Повторение и систематизация знаний.

Методические рекомендации.

### **Задания для самостоятельной работы**

Разбор и анализ лекционного материала по теме.

Выполнение практической работы.

- 1) В тетраэдре ДАВС точки К, Е, М являются серединами рёбер АС, ДС, ВС. Доказать, что плоскость (КЕМ) параллельна плоскости (АДВ) и вычислить  $S_{\Delta АДВ}$ , если  $S_{\Delta КЕМ} = 27 \text{ см}^2$ .
- 2) Прямая  $m$  параллельна диагонали ВД ромба АВСД и не лежит в плоскости ромба. Докажите, что  $m$  и АД – скрещивающиеся прямые – и найдите угол между ними, если угол АВС равен  $128^\circ$ .
- 3) Дан параллелограмм АВСД и точка Е, не лежащая в плоскости (АВС). Как расположена прямая АС и плоскость ЕВД? Ответ обоснуйте.

### **Внеаудиторная самостоятельная работа. №9**

Тема: «Перпендикулярность прямых и плоскостей.»

Цель: Повторение и систематизация знаний.

Методические рекомендации.

При решении задач используется определение перпендикулярных прямых в пространстве.

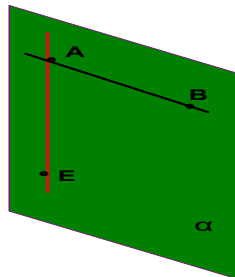
Опр.



Две прямые в пространстве называются перпендикулярными, если угол между ними равен  $90^\circ$ .

Обратить внимание на то, что в пространстве перпендикулярные прямые могут быть пересекающимися и скрещивающимися.

AE перпендикулярна AB  
AE и AB пересекающиеся  
прямые  
CD перпендикулярна AB  
AB и CD скрещивающиеся  
прямые



### Признак перпендикулярности прямой и плоскости

Если прямая перпендикулярна к двум пересекающимся прямым, лежащим в плоскости, то она перпендикулярна к этой плоскости.

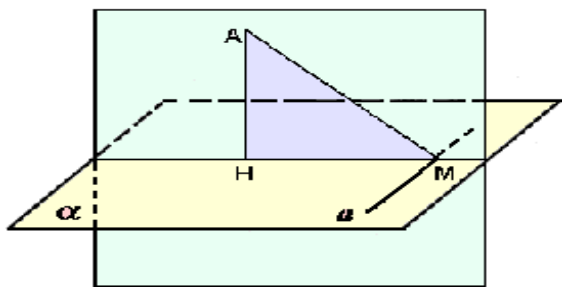
В задачах часто используется теорема о 3-х перпендикулярах:

Прямая, проведённая в плоскости через основание наклонной перпендикулярно к её проекции на эту плоскость, перпендикулярна и к самой наклонной.

### Обратная теорема

Прямая, проведённая в плоскости через основание наклонной перпендикулярно к ней, перпендикулярна и к её проекции.

При решении задач на нахождение угла между прямой и плоскостью необходимо помнить, что углом между прямой и плоскостью является наименьший угол между прямой и её проекцией на эту плоскость.



АН- перпендикуляр

АМ- наклонная

НМ – проекция наклонной на данную плоскость

a -прямая, проходящая через основание наклонной

### **Задания для самостоятельной работы**

Разбор и анализ лекционного материала по теме.

Выполнение практической работы.

1. Даны параллельные плоскости  $\alpha$  и  $\beta$ . Через точки А и В плоскости  $\alpha$  даны параллельные прямые, пересекающие плоскость  $\beta$  в точках  $A_1$  и  $B_1$ . Найдите  $A_1B_1$ , если  $AB = 5\text{см}$ .

2.Верно, что плоскости параллельны, если прямая, лежащая в одной плоскости, параллельна другой плоскости?

3. Две плоскости параллельны между собой. Из точки М, не лежащей ни в одной из этих плоскостей, ни между плоскостями, проведены две прямые, пересекающие эти плоскости соответственно в точках  $A_1$  и  $A_2$ ,  $B_1$  и  $B_2$ . Известно, что  $MA_1 = 4$  см,  $B_1B_2 = 9$  см,  $A_1A_2 = MB_1$ . Найдите  $MA_2$  и  $MB_2$ .

**Внеаудиторная самостоятельная работа. №10**

**Тема:** «Понятие многогранника Призма. Пирамида. Правильные многогранники.».

**Цель:** Повторение и систематизация знаний.

**Задания для самостоятельной работы**

Разбор и анализ лекционного материала по теме.

Выполнение практической работы.

1) Сторона основания правильной четырёхугольной призмы равна  $a$ , а диагональ призмы образует с плоскостью основания угол  $45^\circ$ . Найти:

а) диагональ призмы;

б) площадь сечения призмы плоскостью, проходящей через сторону нижнего основания и противоположную сторону верхнего основания.

2) Основанием прямой призмы является прямоугольный треугольник, гипотенуза которого равна  $m$ , а острый угол равен  $60^\circ$ . Через катет, противолежащий этому углу, и противоположную этому катету вершину другого основания проведено сечение, составляющее  $45^\circ$  с плоскостью основания. Доказать, что  $\triangle A_1CD$  прямоугольный. Вычислить площадь основания призмы, высоту призмы.

**Внеаудиторная самостоятельная работа. №11**

**Тема:** «Цилиндр, конус, шар».

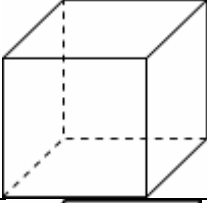
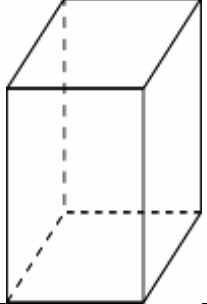
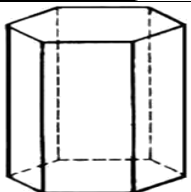
**Цель:** Повторение и систематизация знаний.

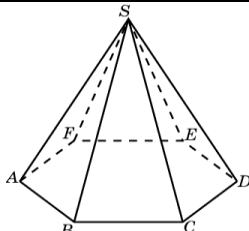
**Методические рекомендации.**

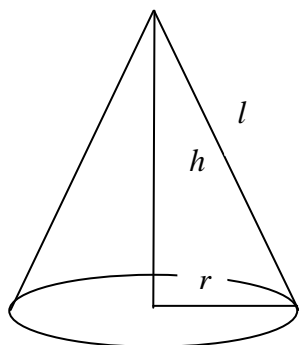
**Тема:** Нахождение основных элементов цилиндра, конуса, шара.

**Цель:** Применение знаний при решении задач.

**Методические рекомендации:**

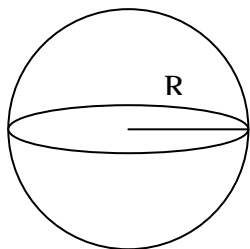
№п/п	Наименование многогранника	Изображение	Площадь боковой и полной поверхности
1	Куб		$S_{\pi} = 6a^2$
2	Прямоугольный параллелепипед		$S_{\pi} = 2ab + 2ac + 2bc$
3	Призма		$S_{\text{б}} = p \cdot H$ $S_{\pi} = S_{\text{б}} + 2S_{\text{о}}$

4	Пирамида		$S_{\text{б}} = \frac{1}{2} p \cdot h$ $S_{\text{п}} = S_{\text{б}} + S_{\text{о}}$
---	----------	--	---



$h$  – высота конуса,  $r$  – радиус основания,  $l$  – образующая конуса.

3. Наглядным является такое изображение шара, в котором большой круг или любое сечение шара горизонтальной плоскостью изображены в виде эллипсов.



$R$  – радиус шара

### Задания для самостоятельной работы

Разбор и анализ лекционного материала по теме.

Выполнение практической работы.

1. Сечение, параллельное оси цилиндра, отстоит от его оси на расстояние, равное 3. Найдите площадь сечения, если радиус основания цилиндра равен 5, а его высота – 10.
2. Основанием прямой призмы служит треугольник со сторонами 6, 8, и 10. Высота призмы равна 4. Площадь боковой поверхности описанного около призмы цилиндра равна...
3. Через вершину конуса проведена плоскость, пересекающая основание по хорде, длина которой равна  $a$ . Эта хорда стягивает дугу  $90^\circ$ . Угол между образующими в сечении равен  $60^\circ$ . Площадь боковой поверхности конуса равна...
4. Основанием пирамиды служит треугольник со стороной, равной 10 и противолежащим ей углом  $30^\circ$ . Боковые ребра пирамиды наклонены к основанию под углом  $60^\circ$ . Площадь боковой поверхности описанного около пирамиды конуса равна.

### Внеаудиторная самостоятельная работа. №12

Тема: «Векторы в пространстве».

Цель: Повторение и систематизация знаний.

.

### Методические рекомендации.

Тема: Выполнение действий над векторами.

Цель: Закрепление знаний.

### Методические рекомендации

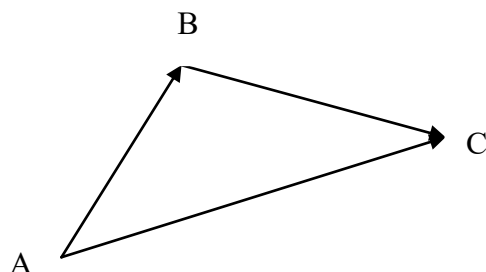
Основные определения, обозначения векторов, действия над векторами в пространстве аналогичны основным характеристикам вектора в пространстве.

### Действия над векторами

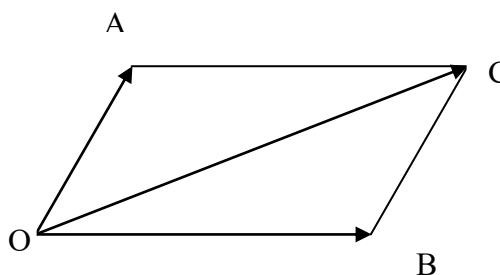
#### 1) Сложение векторов.

Правило треугольника

$$\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC} \quad \vec{OA} + \vec{OB} = \vec{OC}$$

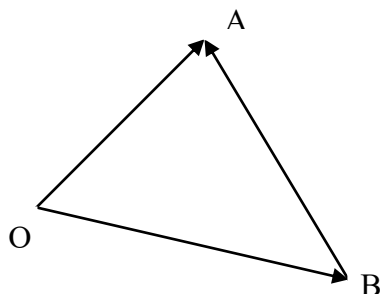


Правило параллелограмма



#### 2) Вычитание векторов

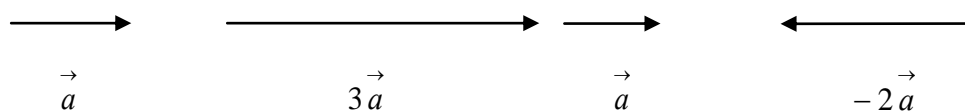
$$\vec{OA} - \vec{OB} = \vec{BA}$$



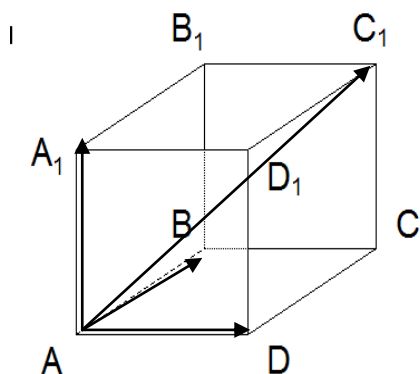
#### 3) Умножение вектора на число:

#### 4) Опр.

Произведением ненулевого вектора  $\vec{a}$  на число  $k$  называется такой вектор  $\vec{b}$ , длина которого равна  $|k| \cdot |\vec{a}|$ , причём векторы  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  сонаправлены при  $k > 0$  и противоположно направлены при  $k < 0$



Для сложения некомпланарных векторов применяют правило параллелепипеда



$$\vec{AA_1} + \vec{AD} + \vec{AB} = \vec{AC_1}$$

### Задания для самостоятельной работы

Разбор и анализ лекционного материала по теме.

Выполнение практической работы.

→ →

1) Нарисуйте параллелепипед  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ , обозначьте вектор  $\vec{CD}$  и  $\vec{AD}$  соответственно через

векторы  $\vec{a}$  и  $\vec{c}$ . а) Изобразите на рисунке векторы  $\vec{a} + \vec{c}$ ,  $\vec{a} - \vec{c}$ ,  $2\vec{a}$ ,  $\frac{1}{3}\vec{c}$

б) Изобразите вектор, начало и конец которого являются вершинами параллелепипеда, равный сумме векторов  $\vec{DA} + \vec{DC} + \vec{DD_1}$

в) Разложите вектор  $\vec{B_1 D_1}$  по векторам  $\vec{A_1 A}$ ,  $\vec{A_1 B}$ ,  $\vec{A_1 D_1}$

### Внеаудиторная самостоятельная работа. №13

Тема: «Метод координат в пространстве.»

Цель: Повторение и систематизация знаний.

.

#### Методические рекомендации.

Тема: Метод координат в пространстве.

Цель: закрепление знаний.

#### Методические рекомендации

При решении задач в координатах применяют правила:

1. Если вектор  $\vec{a}$  имеет координаты  $\{x; y; z\}$ , то его можно разложить по координатным векторам

$\vec{a} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{k}$  где  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  - координатные векторы.

Пусть даны векторы  $\vec{a}\{x_1; y_1; z_1\}$  и  $\vec{b}\{x_2; y_2; z_2\}$

2. Если  $\vec{a} = \vec{b}$ , то  $x_1 = x_2$ ,  $y_1 = y_2$ ,  $z_1 = z_2$

3.  $\vec{a} + \vec{b} \{x_1 + x_2; y_1 + y_2; z_1 + z_2\}$

4.  $\vec{a} - \vec{b} \{x_1 - x_2; y_1 - y_2; z_1 - z_2\}$

5.  $k \cdot \vec{a} \{k \cdot x_1; k \cdot y_1; k \cdot z_1\}$

Скалярное произведение векторов:  $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \alpha$

Скалярное произведение векторов в координатах:  $\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2$

Вычисление координат середины отрезка

$A(x_1; y_1; z_1)$ ,  $B(x_2; y_2; z_2)$  и  $C(x; y; z)$  - середина отрезка

$x = \frac{x_1 + x_2}{2}$ ;  $y = \frac{y_1 + y_2}{2}$ ;  $z = \frac{z_1 + z_2}{2}$

Вычисление длины вектора по его координатам

$\vec{a}\{x; y; z\}$   $|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

Расстояние между двумя точками

$$M_1(x_1; y_1; z_1) \quad , \quad M_2(x_2; y_2; z_2) \quad |M_1 M_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

Угол между векторами  $\vec{a}\{x_1; y_1; z_1\}$  и  $\vec{b}\{x_2; y_2; z_2\}$

$$\cos \alpha = \frac{x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$$

Угол между прямыми , где  $\vec{a}\{x_1; y_1; z_1\}$  и  $\vec{b}\{x_2; y_2; z_2\}$  - направляющие векторы прямых

$$\cos \alpha = \frac{|x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2|}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$$

### Задания для самостоятельной работы

1. Упростите выражение:  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{NM}$ .
2. Точка  $K$  – середина ребра  $B_1B$  параллелепипеда  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ . Разложите вектор  $\overrightarrow{D_1 K}$  по векторам  $\vec{a} = \overrightarrow{D_1 A_1}$ ,  $\vec{b} = \overrightarrow{D_1 C_1}$ ,  $\vec{c} = \overrightarrow{D_1 D}$ .
3. Дана треугольная призма  $ABCA_1 B_1 C_1$ . Укажите вектор  $\vec{x}$ , начало и конец которого являются вершинами призмы, такой, что  $\overrightarrow{AC_1} - \overrightarrow{BB_1} + \vec{x} = \overrightarrow{AB}$ .
4. Даны четыре точки  $A(2; 5; -3)$ ,  $B(-2; 3; -4)$ ,  $C(-6; 1; -5)$ ,  $D(-2; -1; -4)$ .  
Укажите среди векторов  $\overrightarrow{AB}$ ,  $\overrightarrow{BC}$ ,  $\overrightarrow{DC}$ ,  $\overrightarrow{AD}$ ,  $\overrightarrow{AC}$ ,  $\overrightarrow{BD}$  равные векторы.
5. Выясните, компланарны ли векторы  $\vec{a}\{1, -2, 0\}$ ,  $\vec{b} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}$ ,  $\vec{c} = 3\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$
6. При каком значении  $k$  векторы  $\vec{a}(6 - k; k; 2)$  и  $\vec{b}(-3; 5 + 5k; -9)$  перпендикулярны?
7. Даны векторы  $\vec{a} = 5\vec{i} - 2\vec{j} + 4\vec{k}$  и  $\vec{b} = 3\vec{j} + 2\vec{k}$ . Вычислите  $\vec{a} * \vec{b}$ .
8. Вычислите угол между прямыми  $AB$  и  $CD$ , если  $A(6; -4; 8)$ ,  $B(8; -2; 4)$ ,  $C(12; -6; 4)$ ,  $D(14; -6; 2)$

### Внеаудиторная самостоятельная работа. №14

Тема: «Объёмы тел».

Цель: Повторение и систематизация знаний.

Методические рекомендации.

1. Объём куба вычисляется по формуле:  $V = a^3$ , где  $a$  – ребро куба.

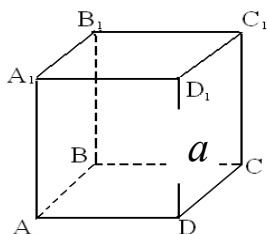
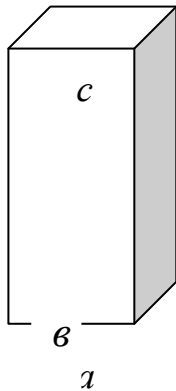
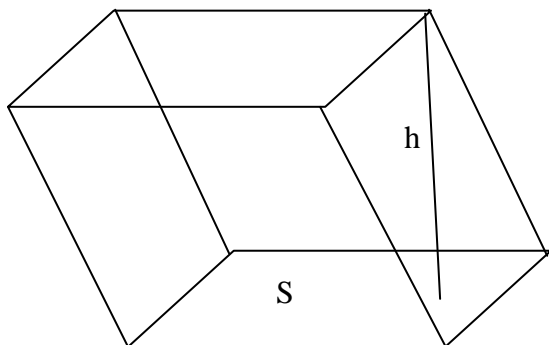


Рис. 1

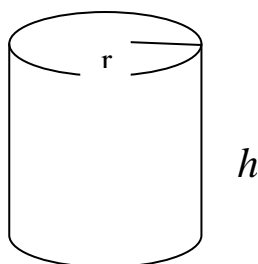
2. Объём прямоугольного параллелепипеда вычисляется по формуле:  $V = a \cdot b \cdot c$ ,  
где  $a$ ,  $b$ ,  $c$  – измерения прямоугольного параллелепипеда (длина, ширина, высота)



3. Объём призмы равен  $V = S_{\text{осн}} \cdot h$



4. Объём цилиндра вычисляется по формуле:  $V = S_{\text{осн}} \cdot h = \pi r^2 h$



Литература: 1. Л.С. Атанасян «Геометрия 10, 11 кл.» стр. 142-143, 145, 146

### **Задания для самостоятельной работы**

#### **1. Внеаудиторная самостоятельная работа.**

Разбор и анализ лекционного материала по теме.

Выполнение практической работы.

1. Кирпич имеет форму прямоугольного параллелепипеда с измерениями 25 см, 12 см и 6,5 см. Плотность кирпича равна 1,8 г/см<sup>3</sup>. Найдите его массу.

2. Основание прямой призмы – прямоугольный треугольник с катетом 6 см и острым углом 45°. Объём призмы равен 108 см<sup>3</sup>. Найдите площадь полной поверхности призмы.

3. Осевым сечением цилиндра является квадрат, диагональ которого равна  $8\sqrt{2}$  см. Найдите объём цилиндра.

4. Измерения прямоугольного параллелепипеда равны 2,5 см, 5 см и 6 см. Найдите ребро куба, объём которого в два раза больше объёма данного параллелепипеда.

5. Основанием прямой призмы является ромб со стороной 6 см и углом  $60^\circ$ . Меньшее из диагональных сечений призмы является квадратом. Найдите объем призмы.

6. Определить объем прямоугольного параллелепипеда по 3-м его измерениям:

- 1)  $a = 8, b = 1,3, c = 6$
- 2)  $a = 18, b = 0,1, c = 2$

### Внеаудиторная самостоятельная работа. №15

Тема: «Производная».

Цель: Повторение и систематизация знаний.

Методические рекомендации.

Опр.

Производной функции  $f(x)$  в точке  $x$  называется предел разностного отношения  $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$  при  $h \rightarrow 0$ .

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Опр.

Операция нахождения производной называется дифференцированием.

Это правило является основным, т.к. выведено из самого определения. Однако при дифференцировании сложных функций, суммы, произведения, частного применение общего правила представляет большие трудности. Поэтому применяют правила дифференцирования.

Правила

При решении задач на нахождение уравнения касательной к графику функции в точке используется геометрический смысл производной  $f'(x_0) = k$

Уравнение касательной  $y = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$

Примеры:

Производные элементарных функций	
1. $(C)' = 0$	12. $(a^x)' = a^x \ln a$
2. $(x^n)' = nx^{n-1}$	13. $(e^x)' = e^x$
3. $(x)' = 1$	14. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
4. $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	15. $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
5. $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$	16. $(\arctg x)' = \frac{1}{1+x^2}$
6. $(\sin x)' = \cos x$	17. $(\text{arcctg } x)' = -\frac{1}{1+x^2}$
7. $(\cos x)' = -\sin x$	18. $(shx)' = chx$
8. $(tg x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$	19. $(chx)' = shx$
9. $(ctg x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$	20. $(th x)' = \frac{1}{ch^2 x}$
10. $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$	21. $(cth x)' = -\frac{1}{sh^2 x}$



11. $(\ln x)' = \frac{1}{x}$	
<b>Правила дифференцирования</b>	
1. $(Cf(x))' = Cf'(x)$ 2. $[u(x) \pm v(x)]' = u'(x) \pm v'(x)$ 3. $[u(x) \cdot v(x)]' = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$ 4. $\left[\frac{u(x)}{v(x)}\right]' = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{v^2(x)}$ 5. $y'_x = y'_u \cdot u'_x$ , если $y = f(u)$ , $u = \varphi(x)$ - производная сложной функции 6. $x'_y = \frac{1}{y'_x}$ , если $y = f(x)$ и $x = \varphi(y)$ - производная обратной функции	

$$(x^2)' = 2x^{2-1} = 2x, \quad (x^3)' = 3x^{3-1} = 3x^2,$$

$$(x^{-1})' = (-1)x^{-1-1} = -\frac{1}{x^2}, \quad \left(x^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

**Задача 4** Вычислить  $f'(-3)$ , если  $f(x) = \sqrt{4-7x}$ .

► Запишем данную функцию так:  $f(x) = (-7x + 4)^{\frac{1}{2}}$ .

По формуле (2) находим  $f'(x) = -\frac{7}{2}(-7x + 4)^{-\frac{1}{2}}$ .

При  $x = -3$  получаем  $f'(-3) = -\frac{7}{2}25^{-\frac{1}{2}} = -0,7$ . ◁

#### Задача 5

Найти производную функции:

1)  $f(x) = x^3 - x^2 + x - 3$ ; 2)  $f(x) = \sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}$ .

1)  $f'(x) = (x^3)' - (x^2)' + (x)' - (3)' = 3x^2 - 2x + 1$ ;

2)  $f'(x) = \left(x^{\frac{1}{2}}\right)' - \left(x^{-\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}$ . ◁

Литература:

1. Ш.А.Алимов «Алгебра и начала анализа» 10-11 кл., стр. 225 - 250

#### Задания для самостоятельной работы

1 Разбор и анализ лекционного материала по теме.

2 Выполнение практической работы.

1. Вычислить производные:

$$\begin{array}{llll}
1) y = x^2 - 6x + 8; & 2) y = \frac{1}{\sqrt{x}}; & 3) y = 1 + x + x^2 + x^3; & 4) y = \sqrt[3]{x} + \frac{3}{\sqrt[3]{x}}; \\
5) y = -1 - x^{-1} - x^{-2}; & 6) y = x + \frac{1}{x}; & 7) y = 2x + 2\sqrt{x}; & 8) y = 2x - \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3}; \\
9) y = \sin x - \cos x; & 10) y = x - \operatorname{arctg} x; & 11) y = \frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\cos x}; & 12) y = \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x; \\
13) y = x - \arcsin x; & 14) y = \cos x + \arccos x.
\end{array}$$

2. Пользуясь правилом дифференцирования сложной функции, найти производные функций:

$$\begin{array}{ll}
1) y = \cos(x^2 + 2x - 4) & 6) y = \sin(x^3 - 3x + 5) \\
2) y = \sin e^x & 7) y = \cos \ln x \\
3) y = e^{2x-3} & 8) y = e^{-x^2} \\
4) y = e^{\operatorname{tg} x} & 9) y = e^{\sin x} \\
5) y = \ln(1 + 2\sqrt{x}) & 10) y = \ln(2x^2 + 4x - 1)
\end{array}$$

### Внеаудиторная самостоятельная работа. №16

Тема: «Применение производная».

Цель: Повторение и систематизация знаний.

Методические рекомендации.

Общее исследование функции и построение её графика рекомендуется выполнять по следующей схеме:

1. Найти область определения функции
2. Производную
3. Стационарные точки
4. Производную
5. Промежутки возрастания и убывания
6. Точки экстремума и значение функции в этих точках.

#### Задача

Построить график функции  $f(x) = x^3 - 2x^2 + x$

#### Решение

2. Производная :  $f'(x) = 3x^2 - 4x + 1$

1. Область определения:  $x \in \mathbb{R}$

3. Стационарные точки:  $f'(x) = 0$

$$3x^2 - 4x + 1 = 0 \quad x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2a}$$

$$x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 3 \cdot 1}}{2 \cdot 3} = \frac{4 \pm \sqrt{4}}{6} = \frac{4 \pm 2}{6} \quad x_1 = 1 \quad x_2 = \frac{1}{3}$$

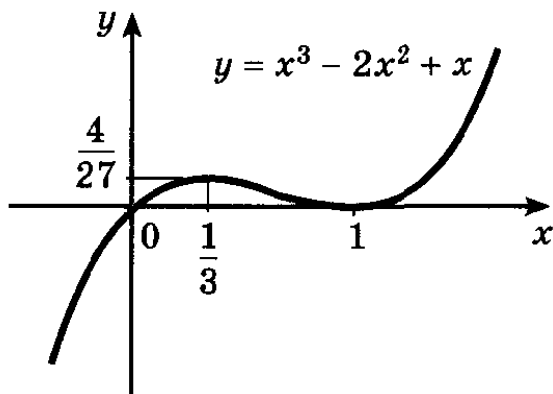
5. Промежутки возрастания и убывания

$$x_1 = \frac{1}{3} - \text{максимум} \quad x_1 = 1 - \text{минимум}$$

6. Точки экстремума и значение функции в этих точках.

$$f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{4}{27} \quad f(1) = 0$$

$\left(\frac{1}{3}; \frac{4}{27}\right)$  – точка максимума     $(1; 0)$  – точка минимума



**Рис. 132**

Литература:

1. Ш.А.Алимов «Алгебра и начала анализа» 10-11 кл. , стр. 267 - 271

### Задания для самостоятельной работы

1 Разбор и анализ лекционного материала по теме.

2 Выполнение практической работы.

3. Периметр прямоугольника 20 м. Обозначим одну из его сторон за  $x$  и рассмотрим те прямоугольники, для которых  $x \in [2; 8]$ . Найдите среди них прямоугольник с наибольшей площадью и прямоугольник с наименьшей площадью. Укажите площади этих прямоугольников.

4. Исследовать функцию и построить ее график.

$$1) f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 5; \quad 2) f(x) = \frac{x^2 - 6x + 13}{x - 3};$$

**Внеаудиторная самостоятельная работа. №17**

**Тема:** «Интеграл».

**Цель:** Повторение и систематизация знаний.

**Методические рекомендации.**

**Таблица основных формул интегрирования.**

1. $\int dx = x + C$	12. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{cases} \arcsin x + C \\ -\arccos x + C \end{cases}$
2. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1)$	13. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \begin{cases} \arcsin \frac{x}{a} + C \\ -\arccos \frac{x}{a} + C \end{cases}$
3. $\int \frac{dx}{x} = \ln x  + C$	14. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln x + \sqrt{x^2 \pm a^2}  + C$
4. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$	15. $\int \frac{1}{1+x^2} dx = \begin{cases} \operatorname{arctg} x + C \\ -\operatorname{arcctg} x + C \end{cases}$
5. $\int e^x dx = e^x + C$	
6. $\int \sin x dx = -\cos x + C$	
7. $\int \cos x dx = \sin x + C$	

8. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$	16. $\int \frac{1}{a^2 + x^2} dx = \begin{cases} \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C \\ -\frac{1}{a} \operatorname{arcctg} \frac{x}{a} + C \end{cases}$
9. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$	17. $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left  \frac{x-a}{x+a} \right  + C \quad (a > 0)$
10. $\int \operatorname{tg} x dx = -\ln  \cos x  + C$	18. $\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln \left  \frac{x+a}{x-a} \right  + C$
11. $\int \operatorname{ctg} x dx = -\ln  \sin x  + C$	

**Задача 1** Вычислить интеграл  $\int_0^1 (x-1) dx$ .

► Одной из первообразных функции  $x-1$  является функция  $\frac{x^2}{2} - x$ . Поэтому  $\int_0^1 (x-1) dx = \left( \frac{1^2}{2} - 1 \right) - \left( \frac{0^2}{2} - 0 \right) = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2}$ . ◁

**Задача 2**

$$\int_{-1}^1 (x^2 + 1) dx = \left( \frac{x^3}{3} + x \right) \Big|_{-1}^1 = \left( \frac{1}{3} + 1 \right) - \left( -\frac{1}{3} - 1 \right) = 1\frac{1}{3} - \left( -1\frac{1}{3} \right) = 1\frac{1}{3} + 1\frac{1}{3} = 2\frac{2}{3}$$

**Задания для самостоятельной работ**

**1** Разбор и анализ лекционного материала по теме.

**2** Выполнение практической работы.

**1.** Проверить, что:

$$1) \int \frac{dx}{x^2 + 4} = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{x}{2} + C; \quad 2) \int 2\sqrt{x} dx = \frac{4x\sqrt{x}}{3} + C; \quad 3) \int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + C; \quad 4) \int e^{-5x} dx = -\frac{1}{5} e^{-5x} + C;$$

$$5) \int \frac{dx}{x^4 + x^2} = -\frac{1}{x} - \operatorname{arctg} x + C;$$

**2.** Вычислить интегралы:

$$1) \int (5x^4 - x^2 + \sqrt{x} + \frac{2}{x}) dx. \quad 2) \int (x^3 + 3x^2 - \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{2}{x^2}) dx.$$

**3.** Вычислить определенный интеграл:

$$1) \int_1^9 \frac{dx}{\sqrt{x}} \quad 2) \int_0^{\pi/2} (\sin x + \cos x) dx \quad 3) \int_0^1 e^{2x} dx \quad 4) \int_0^1 (\sqrt{x} + x^2) dx \quad 5) \int_{-1}^{\sqrt{3}} \frac{dx}{x^2 + 1}.$$

$$6) \int_0^1 \frac{3x^4 + 3x^2 + 1}{x^2 + 1} dx.$$

4. Найти площади фигур, ограниченных линиями:

1.  $y = x^2 + 5x + 6$ ,  $x = -1$ ,  $x = 2$ ,  $y = 0$ .

2.  $y = \sin x$ ,  $y = 0$ ,  $x = \frac{\pi}{2}$ ;

**Внеаудиторная самостоятельная работа. №18**

**Тема:** «Комбинаторика».

**Цель:** Повторение и систематизация знаний.

**Методические рекомендации.**

**Комбинаторика** - наука о комбинациях, состоящих из объектов одной и той же природы, различающихся способами (перестановки, сочетания, размещения).

### 1. Число перестановок.

Рассмотрим следующую задачу: имеется  $n$  последовательно расположенных неодинаковых элементов. Требуется найти количество способов, которыми их можно переставить (восклицательным знаком обозначается факториал).

$$P_n = n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$$

Пример 1.1

Сколькими способами можно переставить 5 различных книг на книжной полке?

$$5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$$

Пример 1.2

Сколько различных чисел можно составить из цифр 0, 1, 2, 3, если ни одна из цифр не будет повторяться?

Решение:

Всего цифр четыре. Если бы среди заданных цифр не было нуля, задача решалась бы аналогично предыдущей:

$$4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24 \text{ различных числа.}$$

Но на первом месте не может стоять ноль. Таких вариантов  $3! = 6$  (0123, 0132, 0213, 0231, 0312, 0321). Поэтому количество чисел:  $4! - 3! = 24 - 6 = 182$ .

### 2. Число сочетаний

Имеется  $n$  различных (неодинаковых, неповторяющихся) элементов. Требуется выбрать из них  $m$  элементов, безразлично, в каком порядке.

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

Пример 2.1

В лотерее нужно зачеркнуть любые 8 чисел из 40. Сколькими способами это можно сделать?

Решение:

Элементы не повторяются, порядок расположения элементов не важен.

$$40! / [8!32!] = (1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 40) / (8! \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 32) = (33 \cdot 34 \cdot \dots \cdot 40) / 8! = 3100796899200 / 40320 = 76904685$$

Число сочетаний используется в формуле бинома Ньютона для определения биномиальных коэффициентов. В школе каждый заучивал формулы квадрата и куба суммы двух чисел:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

Для произвольной степени формула выглядит так:

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \dots + C_n^{n-2} a^2 b^{n-2} + C_n^{n-1} a b^{n-1} + C_n^n b^n$$

Как мы видим, коэффициенты относительно краев выражения симметричны:

$C_{nn}=C_{n0}=1$ ,  $C_{n-1n}=C_{1n}=n$ ,  $C_{nn-2}=C_{n2}=n(n-1)/2!$ ,  $C_{nn-3}=C_{n3}=n(n-1)(n-2)/3!$ , и т.д.

### 3. Число размещений

Так же, как и в предыдущем примере, имеется  $n$  различных элементов. Нужно выбрать из них  $m$  элементов, причем порядок расположения элементов важен!

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$$

Пример 3.1

Человек забыл две последние цифры в шестизначном телефонном номере, помнит только, что они были неодинаковые и нечетные. Сколько таких телефонных номеров может быть?

Решение:

Нечетных цифр всего пять: 1, 3, 5, 7, 9. Цифры по условию задачи не повторяются. Порядок расположения элементов важен.

$$5!/3! = 120/6 = 20$$

### Задания для самостоятельной работы

Разбор и анализ лекционного материала по теме.

Выполнение практической работы.

1. В группе из 20 студентов необходимо выбрать троих делегатов на студенческую конференцию. Сколькими различными способами можно это сделать?
2. Сколькими различными способами можно заполнить карточку «Спортлото», если для ее заполнения требуется отметить 6 видов спорта из перечисленных в карточке 49 видов?
3. Сколько разных требований на 3 книги может составить читатель, если в библиотеке всего 1000 наименований книг?
4. В ассортименте магазина 10 видов шоколадных конфет. Для составления новогоднего подарка используют 6 видов, причем берется одинаковое количество конфет каждого вида. Сколько различных подарков можно составить?
5. Из пяти имеющихся красок выбирают две краски для получения смеси. Сколько различных смесей можно получить, если разными считаются смеси, имеющие разный состав красок?

### Внеаудиторная самостоятельная работа. №19

Тема: «Элементы теории вероятностей и математической статистики».

Цель: Повторение и систематизация знаний.

#### Методические рекомендации.

Опр. Событие – это любое явление, которое происходит или не происходит или результат испытаний, наблюдений и явлений. События обозначают заглавными латинскими буквами А, В, С, ...

Примеры случайных событий: выпадение шестерки при подбрасывании игральной кости, отказ технического устройства, искажение сообщения при передаче его по каналу связи.

Долю успеха того или иного события называют вероятностью этого события и обозначают  $P(A)$

Опр. Если в некотором испытании существует  $n$  равновероятных попарно несовместных исходов и  $m$  из них благоприятствуют событию А, то вероятностью наступления события А

называют отношение  $\frac{m}{n}$  и записывают  $P(A) = \frac{m}{n}$

Пример Найти вероятность появления при одном бросании игральной кости числа очков, большего 4.

Решение: А – «появление числа очков, большего 4»  $n = 6$  - число всех исходов,  $m = 2$  –

благоприятствующих событию А ( 5, 6 )  $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$  Ответ:  $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{1}{3}$

Опр. **Суммой** (объединением) двух событий  $A$  и  $B$  (обозначается  $A+B$ ,  $A$  или  $B$ ) называется такое событие, которое заключается в том, что происходит хотя бы одно из событий, т.е.  $A$  или  $B$ , или оба одновременно.

Пример

В коробке лежат 8 зеленых, 7 синих и 15 красных карандашей. Вычислить вероятность того, что взятый наугад карандаш будет, синим или зеленым.

Решение:

$A$ : взяли синий карандаш

$B$ : взяли зеленый карандаш

$C$ : взяли синий или зеленый карандаш

Событие  $C$  равно сумме событий  $A$  и  $B$ :  $C = A + B$

Вероятность события  $A$  равна 
$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{7}{30}$$

Вероятность события  $B$  равна 
$$P(B) = \frac{m}{n} = \frac{8}{30}$$

Вероятность события  $C$  равна 
$$P(C) = P(A+B) = P(A) + P(B) = \frac{7}{30} + \frac{8}{30} = \frac{15}{30} = 0,5$$

Опр. **Произведением** (пересечением) двух событий  $A$  и  $B$  (обозначается  $A \times B$ ,  $A \cap B$ ) называется такое событие, которое заключается в том, что происходят оба события  $A$  и  $B$  вместе.

Пример

В одной коробке находится 4 белых и 8 черных шаров, а в другой – 3 белых и 9 черных. Из каждой коробки вынули по шару. Вычислить вероятность того, что оба шара окажутся белыми.

Решение:

$A$ : из первой коробки вынули белый шар

$B$ : из второй коробки вынули белый шар

$C$ : из коробок вынули белые шары

Вероятность события  $A$  равна 
$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

Вероятность события  $B$  равна 
$$P(B) = \frac{m}{n} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$$

Вероятность события  $C$  равна 
$$P(C) = P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{12} \approx 0,083$$

Ответ:  $P(C) \approx 0,083$

Опр.

**Случайной величиной** называется переменная величина, которая может принимать те или иные значения в зависимости от случая.

Опр.

Функция, связывающая значения случайной величины с соответствующими им вероятностями, называется **законом распределения** дискретной случайной величины.

Опр.

Полигоном частот называют зависимость, выражающую распределение величины  $X$  по частотам или по относительным частотам.

Характеристики случайной величины:

Опр.

**Размах** (обозначается  $R$ ) - разница между наибольшим и наименьшим значениями случайной величины.

Опр.

**Мода** (обозначается  $M_o$ ) – наиболее часто встречающееся значение случайной величины.

Опр.

**Медиана** (обозначается  $M_e$ ) – это так называемое срединное значение упорядоченного ряда значений случайной величины.

### Пример

В детском обувном магазине за декаду было куплено 750 пар обуви. Кладовщик проводил статистическое исследование и с этой целью записывал размеры каждой пятой из затребованных пар. Эти числа составили следующий ряд данных: 23, 24, 16, 21, 18, 17, 20, 23, 18, 16, 19, 18, 22, 19, 21, 17, 24, 15, 23, 19, 16, 22, 18, 24, 19, 17, 22, 19, 15, 23, 21, 23, 19, 23, 17, 22, 16, 19, 22, 18, 20, 15, 21, 23, 19, 18, 23, 22, 20, 17, 19, 23, 21, 24, 22, 23, 20, 22, 21, 18, 16, 19, 22, 23, 20, 24, 21, 19, 24, 16, 20, 23, 24, 18, 22, 17, 15, 21, 24, 20, 19, 17, 21, 20, 15, 23, 24, 18, 16, 22, 23, 24, 21, 15, 23, 22, 20, 23, 19, 20, 17, 22, 19, 20, 24, 15, 23, 18, 22, 23, 15, 21, 24, 19, 18, 19, 17, 15, 19, 23, 20, 17, 22, 23, 20, 18, 22, 19, 20, 18, 19, 24, 18, 16, 21, 24, 17, 15, 20, 22, 21, 24, 22, 18, 22, 18, 24, 15, 21.

а) Постройте таблицу частот.

б) Определите моду ряда (самый распространенный размер).

в) Постройте диаграмму частот.

г) Найдите средний размер по этой выборке.

### Решение.

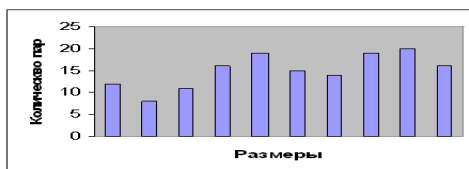
а) Сначала при просмотре всей выборки выясним, какие в ней встречаются размеры, и расположим их в порядке возрастания: 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24. Далее подсчитаем количество пар каждого размера в выборке (т.е. частоту появления каждого размера) и сведем данные в таблицу

Размер обуви 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24

Частота 12 8 11 16 19 15 14 19 20 16

б) Мода данного ряда – число 23.

в) Воспользуемся данными таблицы для построения диаграммы частот, в которой по горизонтальной оси отложены номера имеющихся размеров, по вертикальной оси – количество пар каждого размера.



г) Найдем средний размер.

Для этого сначала

вычислим сумму всех

членов ряда:  $15 \cdot 12 + 16 \cdot 8$

$+ 17 \cdot 11 + 18 \cdot 16 + 19 \cdot 19 + 20 \cdot 15 + 21 \cdot 13 + 22 \cdot 19 + 23 \cdot 20 + 24 \cdot 16 = 3000$ , затем общее количество членов ряда. Это удобно сделать, сложив частоты:  $12 + 8 + 11 + 16 + 19 + 15 + 14 + 19 + 20 + 16 = 150$ , далее, разделив первый результат на второй, получим средний размер:  $3000 / 150 = 20$ .

### **Задания для самостоятельной работы**

Разбор и анализ лекционного материала по теме.

Выполнение практической работы.

1. Из 20 яблок, находящихся в корзине, 6 яблок – сорта «шафран». Найти вероятность того, что взятое из корзины яблоко не принадлежит сорту «шафран».
2. В магазин поступило 12 компьютеров, среди которых три имеют скрытые дефекты. Найти вероятность того, что выбранный наудачу компьютер не имеет скрытых дефектов.
3. На стол одновременно бросают игральный кубик и игральный тетраэдр (грани которого пронумерованы числами 1, 2, 3, 4). Составить таблицу распределения по вероятностям



значений случайной величины  $X$  – суммы очков, выпавших на кубике и грани тетраэдра, касающейся поверхности стола.

4. В таблице приведены размеры одежды 50 учащихся 10 класса. На основании этих данных составить таблицу распределения по вероятностям значений случайной величины  $X$  – размеров одежды учащихся 10 класса. Составить таблицы распределения по частотам ( $M$ ) и относительным частотам ( $W$ )

42	42	52	44	46	38	46	42	44	48
48	40	46	42	44	50	46	44	46	48
50	40	44	44	46	46	44	48	46	44
46	48	44	40	52	44	48	50	46	46
38	44	48	50	40	42	50	46	54	44

5. Построить полигон частот и полигон относительных частот значений случайной величины  $X$ , распределение которой представлено в таблице:

X	23	24	25	26	27	28
M	6	5	2	3	1	3

6. Найти размах, моду и медиану выборки:

0,2 ; 0,4; 0,1; 0,5; 0,1; 0,2; 0,3; 0,5; 0,4; 0,6

Построить полигон частот значений величины и указать на нём размах, моду и медиану.

### Критерии оценки внеаудиторной самостоятельной работы.

Качество выполнения внеаудиторной самостоятельной работы обучающихся оценивается посредством текущего контроля самостоятельной работы с использованием балльно-рейтинговой системы. Текущий контроль СРС – это форма планомерного контроля качества и объема, приобретаемых обучающимися компетенций в процессе изучения учебного предмета, проводится на практических и семинарских занятиях и во время консультаций преподавателя.

100~89% Максимальное количество баллов, самостоятельной работы обучающегося по каждому виду задания, если:

обстоятельно с достаточной полнотой излагает соответствующую тему;

дает правильные формулировки, точные определения, понятия терминов;

может обосновать свой ответ, привести необходимые примеры;

правильно отвечает на дополнительные вопросы преподавателя, имеющие целью выяснить степень понимания обучающимся данного материала.

70~89% от максимального количества баллов обучающийся получает, если:

неполно (не менее 70% от полного), но правильно изложено задание;

при изложении были допущены 1-2 несущественные ошибки, которые он исправляет после замечания преподавателя;

дает правильные формулировки, точные определения, понятия терминов;

может обосновать свой ответ, привести необходимые примеры;

правильно отвечает на дополнительные вопросы преподавателя, имеющие целью выяснить степень понимания студентом данного материала.

50~69% от максимального количества баллов обучающийся получает, если:

неполно (не менее 50% от полного), но правильно изложено задание;

при изложении была допущена 1 существенная ошибка;

знает и понимает основные положения данной темы, но допускает неточности в формулировке понятий;

излагает выполнение задания недостаточно логично и последовательно; • затрудняется при ответах на вопросы преподавателя.

49% и менее от максимального количества баллов обучающийся получает, если: неполно (менее 50% от полного) изложено задание; • при изложении были допущены существенные ошибки.

В "0" баллов преподаватель вправе оценить выполненное обучающимся задание, если оно не удовлетворяет требованиям, установленным преподавателем к данному виду работы.

Сумма полученных баллов по всем видам заданий внеаудиторной самостоятельной работы составляет рейтинговый показатель студента. Рейтинговый показатель студента влияет на выставление итоговой оценки по результатам изучения учебного предмета.

**Таблица перевода баллов в оценку**

Балл	100~89%	70~89%	50~69%	49% и менее
Оценка	5 (отл.)	4(хор.)	3(удов.)	2(не удов.)

### **3.2. Информационное обеспечение обучения**

Перечень рекомендуемых учебных изданий, Интернет-ресурсов, дополнительной литературы.

#### **Основные источники:**

1. **Алимов Ш.А.** и др. Алгебра и начала анализа. 10 -11 кл. общеобразовательных учреждений – М. Просвещение, 2013.
2. **Атанасян Л.С.** и др. Геометрия. 10 -11 кл. общеобразовательных учреждений – М.: Просвещение, 2015.
3. **Башмаков М.И.** Математика. Учебник для обучающихся в учреждениях начального и среднего профессионального образования. М.: Издательский центр “Академия”, 2014.
4. **Башмаков М.И.** Математика. Задачник для обучающихся в учреждениях начального и среднего профессионального образования. М.: Издательский центр “Академия”, 2014.
5. **Башмаков М.И.** Математика. Сборник задач для обучающихся в учреждениях начального и среднего профессионального образования. М.: Издательский центр “Академия”, 2014.

#### **Дополнительные источники:**

1. **Колмогоров А.Н.** и др. Алгебра и начала анализа. 10 (11) кл. общеобразовательных учреждений – М.: Просвещение, 2015.
2. **Мордкович А. Г.** Алгебра и начала математического анализа. 10-11 кл. Учебник и задачник для учащихся общеобразовательных учреждений. - М.: Мнемозина, 2013.
3. **Погорелов А. В.** Геометрия 10-11 кл. общеобразовательных учреждений - М.: Просвещение, 2015.
4. **Семенко Е.А.** Тематический сборник заданий для подготовки к ЕГЭ по математике. 10-11 кл. М.: Вентана-Граф, 2016.
5. **Пехлецкий И.Д.** Математика: Учебник для СПО. Рецензия №058 от 31 января 2014г. ФГАУ"ФИРО". - 13-е изд., стер. - М.: Академия, 2015.

#### **Интернет- ресурсы:**

1. <http://window.edu.ru> – Единое окно доступа к образовательным ресурсам.
2. <http://www.mathematics.ru> - Математика в Открытом колледже.
3. <http://www.exponenta.ru> - Образовательный математический сайт.
4. <http://www.mathnet.ru> - Общероссийский математический портал Math-Net.Ru
5. Газета «Математика» «издательского дома» «Первое сентября» <http://www.1september.ru>