Итоговая Аттестация по Теории Вероятности и Статистике.

Задание ЕГЭ тип №5 «Больше-Меньше»

Выполнили:
Чуверин Никита
Коротков Кирилл

Классическое определение вероятности

Два события, образующие полную группу называются противоположными.

А – за одно выбрасывание выпала решка

В – за одно выбрасывание выпал орел

А и В – противоположные события

$$P(A) = 1 - P(\overline{A})$$

Формула Бернулли

Даниил Бернулли

Формула Бернулли — формула в теории вероятностей, позволяющая находить вероятность появления события **A** определённое количество раз при любом числе независимых испытаний. Формула Бернулли позволяет избавиться от большого числа вычислений — сложения и умножения вероятностей — при достаточно большом количестве испытаний.

Оказывается можно точно подсчитать число «удачных» комбинаций исходов испытаний, для которых событие A наступает k раз в n независимых испытаниях, — в точности это количество сочетаний из n по k:

Теорема. Если вероятность p наступления некоторого события в каждом испытании постоянна, то вероятность того, что данное событие наступит ровно k раз в n независимых испытаниях, равна $P_{k(n)} = C_n^k p^k q^{n-k}$, где $q = 1 - p$

Задача №1

Стрелок стреляет по пяти одинаковым мишеням. На каждую мишень даётся не более двух выстрелов, и известно, что вероятность поразить мишень каждым отдельным выстрелом равна 0,6. Во сколько раз вероятность события «стрелок поразит ровно три мишени» больше вероятности события «стрелок поразит ровно две мишени»?

Решение:

1. Вероятность попасть в мишень с первого выстрела: 0,6 (по условию), вероятность промаха с первого выстрела: 1-0,6=0,4
2. Вероятность попасть в мишень со второго выстрела (то есть первый раз "промах", второй раз "попал"): 0,4*0,6=0,24

Тогда, вероятность поразить мишень с первого ИЛИ второго выстрела: 0,6+0,24=0,84,

А вероятность не попасть в мишень, используя два выстрела: 1-0,84=0,16

3.Для вероятности событий "стрелок поразит ровно три мишени" или "стрелок поразит ровно две мишени"необходимо использовать формулу Бернулли

Вероятность событий "стрелок поразит ровно три мишени":

$$P_5(3)=\frac{5!}{(5-3)!3!}0{,}84^3*0{,}16^2,\ (C_5^3\frac{5!}{(5-3)!3!})$$

Вероятность событий "стрелок поразит ровно две мишени":

$$P_5(2)=\frac{5!}{(5-2)!2!}0{,}84^2*0{,}16^3$$

! – знак факториала, т.е. n!=1*2*3*…*n

Затем отвечаем на вопрос задачи:

$$\frac{P_5(3)}{P_5(2)}$$

$$\frac{10*0{,}84^3*0{,}16^2}{10*0{,}84^2*0{,}16^3}=\frac{0{,}84}{0{,}16}=5{,}25$$

Задача №2

Вероятность того, что новый электрический чайник прослужит больше года, равна 0,97. Вероятность того, что он прослужит больше двух лет, равна 0,89. Найдите вероятность того, что он прослужит меньше двух лет, но больше года.

Решение.

Пусть A = «чайник прослужит больше года, но меньше двух лет», B = «чайник прослужит больше двух лет», C = «чайник прослужит ровно два года», тогда A + B + C = «чайник прослужит больше года».

События A, B и C несовместные, вероятность их суммы равна сумме вероятностей этих событий. Вероятность события C, состоящего в том, что чайник выйдет из строя ровно через два года — строго в тот же день, час, наносекунду и т. д. — равна нулю. Тогда:

$$P(A+B+C) = P(A)+P(B)+P(C)=P(A)+P(B),$$

откуда, используя данные из условия, получаем

$$0{,}97 = P(A)+0{,}89.$$

Тем самым для искомой вероятности имеем:

$$P(A) = 0{,}97-0{,}89 = 0{,}08.$$

Ответ: 0,08.

Задача №3

Вероятность того, что в случайный момент времени температура тела здорового человека окажется ниже чем 36,8 °С, равна 0,81. Найдите вероятность того, что в случайный момент времени у здорового человека температура окажется 36,8 °С или выше.

Решение.

Указанные события противоположны, поэтому искомая вероятность равна $1 - 0{,}81 = 0{,}19$.

Ответ: 0,19.

Задача №4

При артиллерийской стрельбе автоматическая система делает выстрел по цели. Если цель не уничтожена, то система делает повторный выстрел. Выстрелы повторяются до тех пор, пока цель не будет уничтожена. Вероятность уничтожения некоторой цели при первом выстреле равна 0,4, а при каждом последующем — 0,6. Сколько выстрелов потребуется для того, чтобы вероятность уничтожения цели была не менее 0,98?

Решение.

Найдем вероятность противоположного события, состоящего в том, что цель не будет уничтожена за n выстрелов. Вероятность промахнуться при первом выстреле равна $1 - 0{,}4 = 0{,}6$, а при каждом следующем $1 - 0{,}6 = 0{,}4$. Эти события независимые, вероятность их произведения равна произведению вероятности этих событий. Поэтому вероятность промахнуться при n выстрелах равна: $0{,}6 \cdot 0{,}4^{n-1}$.

Осталось найти наименьшее натуральное решение неравенства

$$0{,}6 \cdot 0{,}4^{n-1} < 0{,}02 \Leftrightarrow \left(\frac{2}{5}\right)^{n-1} < \frac{1}{30}.$$

Последовательно проверяя значения n, равные 1, 2, 3 и т. д. находим, что искомым решением является $n = 5$. Следовательно, необходимо сделать 5 выстрелов.

Ответ: 5.

Задача №5

Вероятность того, что новый электрический чайник прослужит больше года, равна 0,93. Вероятность того, что он прослужит больше двух лет, равна 0,87. Найдите вероятность того, что он прослужит меньше двух лет, но больше года.

Решение.

Пусть A = «чайник прослужит больше года, но меньше двух лет», B = «чайник прослужит больше двух лет», C = «чайник прослужит ровно два года», тогда A + B + C = «чайник прослужит больше года».

События A, B и C несовместные, вероятность их суммы равна сумме вероятностей этих событий. Вероятность события C, состоящего в том, что чайник выйдет из строя ровно через два года — строго в тот же день, час и секунду — равна нулю. Тогда:

$$P(A+B+C) = P(A)+P(B)+P(C)=P(A)+P(B),$$

откуда, используя данные из условия, получаем

$$0{,}93 = P(A)+0{,}87.$$

Тем самым, для искомой вероятности имеем:

$$P(A) = 0{,}93-0{,}87 = 0{,}06.$$

Ответ: 0,06.

Задача №6

Чтобы поступить в институт на специальность «Лингвистика», абитуриент должен набрать на ЕГЭ не менее 70 баллов по каждому из трёх предметов — математика, русский язык и иностранный язык. Чтобы поступить на специальность «Коммерция», нужно набрать не менее 70 баллов по каждому из трёх предметов — математика, русский язык и обществознание.

Вероятность того, что абитуриент *З.* получит не менее 70 баллов по математике, равна 0,6, по русскому языку — 0,8, по иностранному языку — 0,7 и по обществознанию — 0,5.

Найдите вероятность того, что *З.* сможет поступить хотя бы на одну из двух упомянутых специальностей.

Решение.

Для того, чтобы поступить хоть куда-нибудь, *З.* нужно сдать и русский, и математику как минимум на 70 баллов, а помимо этого еще сдать иностранный язык или обществознание не менее, чем на 70 баллов. Пусть A, B, C и D — это события, в которых *З.* сдает соответственно математику, русский, иностранный и обществознание не менее, чем на 70 баллов. Тогда поскольку

$$P(C+D)=P(C)+P(D)-P(C\cdot D),$$

для вероятности поступления имеем:

$$P(AB(C+D))=P(A)\cdot P(B)\cdot P(C+D)=P(A)\cdot P(B)\cdot(P(C)+P(D)-P(C)\cdot P(D))$$
$$=0,6\cdot 0,8\cdot(0,7+0,5-0,7\cdot 0,5)=0,408.$$

Ответ: 0,408.

Задача №7

Из районного центра в деревню ежедневно ходит автобус. Вероятность того, что в понедельник в автобусе окажется меньше 18 пассажиров, равна 0,82. Вероятность того, что окажется меньше 10 пассажиров, равна 0,51. Найдите вероятность того, что число пассажиров будет от 10 до 17.

Решение.

Рассмотрим события A = «в автобусе меньше 10 пассажиров» и B = «в автобусе от 10 до 17 пассажиров». Их сумма — событие A + B = «в автобусе меньше 18 пассажиров». События A и B несовместные, вероятность их суммы равна сумме вероятностей этих событий:

$$P(A + B) = P(A) + P(B).$$

Тогда, используя данные задачи, получаем: $0{,}82 = 0{,}51 + P(B)$, откуда $P(B) = 0{,}82 - 0{,}51 = 0{,}31$.

Ответ: 0,31.

Задача №8

При изготовлении подшипников диаметром 67 мм вероятность того, что диаметр будет отличаться от заданного не больше, чем на 0,01 мм, равна 0,965. Найдите вероятность того, что случайный подшипник будет иметь диаметр меньше чем 66,99 мм или больше чем 67,01 мм.

Решение.

По условию, диаметр подшипника будет лежать в пределах от 66,99 до 67,01 мм с вероятностью 0,965. Поэтому искомая вероятность противоположного события равна $1 - 0{,}965 = 0{,}035$.

Ответ: 0,035.

Задача №9

Вероятность того, что на тестировании по биологии учащийся О. верно решит больше 11 задач, равна 0,67. Вероятность того, что О. верно решит больше 10 задач, равна 0,74. Найдите вероятность того, что О. верно решит ровно 11 задач.

Решение.

Рассмотрим события A = «учащийся решит 11 задач» и B = «учащийся решит больше 11 задач». Их сумма — событие A + B = «учащийся решит больше 10 задач». События A и B несовместные, вероятность их суммы равна сумме вероятностей этих событий:

$$P(A + B) = P(A) + P(B).$$

Тогда, используя данные задачи, получаем: $0{,}74 = P(A) + 0{,}67$, откуда $P(A) = 0{,}74 - 0{,}67 = 0{,}07$.

Ответ: 0,07.

Задача №10

Стрелок стреляет по одному разу по каждой из пяти одинаковых мишеней. Вероятность поразить мишень каждым отдельным выстрелом равна 0,8. Во сколько раз вероятность события «стрелок поразит ровно четыре мишени» больше вероятности события «стрелок поразит ровно три мишени»?

Решение.

Вероятность попадания в мишень с первого раза равна 0,8. Вероятность противоположного события — промаха — равна 1 − 0,8 = 0,2. Для нахождения вероятности событий «стрелок поразит ровно четыре мишени» и «стрелок поразит ровно три мишени» воспользуемся формулой Бернулли:

$$P_5(4) = C_5^4 p^4 q^1 = \frac{5!}{(5-4)!\cdot 4!}\cdot 0,8^4\cdot 0,2 = 5\cdot 0,8^4\cdot 0,2;$$

$$P_5(3) = C_5^3 p^3 q^2 = \frac{5!}{(5-3)!\cdot 3!}\cdot 0,8^3\cdot 0,2^2 = 10\cdot 0,8^3\cdot 0,2^2.$$

Теперь найдем искомые отношение вероятностей:

$$\frac{P_5(4)}{P_5(3)} = \frac{5\cdot 0,8^4\cdot 0,2}{10\cdot 0,8^3\cdot 0,2^2} = \frac{0,8}{0,4} = 2.$$

Ответ: 2.

Спасибо за Внимание!!!