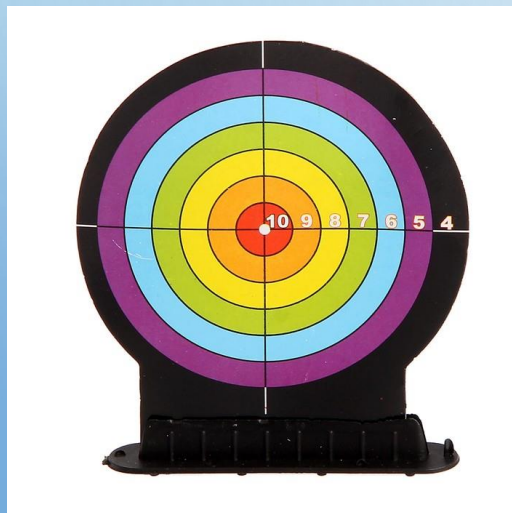


ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТИ. ЗАДАЧИ С ПОПАДАНИЕМ В МИШЕНЬ.



ВЫПОЛНИЛИ: ГАЛАКТИОНОВА
АНАСТАСИЯ И АЛЕЙНИКОВА ДАРЬЯ
УЧЕНИЦЫ 10"М"



ЗАДАЧИ **ПРО СТРЕЛКОВ**, КОТОРЫЕ ДЕЛАЮТ ВЫСТРЕЛЫ ПО ЦЕЛЯМ (ИЛИ МИШЕНЯМ), ПРИЧЕМ ВЕРОЯТНОСТИ ПОПАДАНИЙ ДЛЯ КАЖДОГО СТРЕЛКА ОБЫЧНО ЗАДАНЫ, А НУЖНО НАЙТИ ВЕРОЯТНОСТЬ РОВНО ОДНОГО ПОПАДАНИЯ, ИЛИ НЕ БОЛЕЕ ДВУХ ПОПАДАНИЙ, ИЛИ ВСЕХ ТРЕХ И ТАК ДАЛЕЕ, В ЗАВИСИМОСТИ ОТ КОНКРЕТНОЙ ЗАДАЧИ.

ОСНОВНОЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ПОДОБНЫХ ЗАДАЧ - ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ТЕОРЕМ О СЛОЖЕНИИ И УМНОЖЕНИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ, КОТОРЫЙ МЫ И РАЗБЕРЕМ НА ПРИМЕРАХ НИЖЕ.

ЗАДАЧИ С 1 СТРЕЛКОМ:

ПУСТЬ:

A — СОБЫТИЕ, СОСТОЯЩЕЕ В ТОМ, ЧТО МИШЕНЬ ПОРАЖЕНА СТРЕЛКОМ С ПЕРВОГО ВЫСТРЕЛА.
мишень, сделав не более 3 выстрелов?

B — СОБЫТИЕ, СОСТОЯЩЕЕ В ТОМ, ЧТО ПЕРВЫЙ РАЗ СТРЕЛОК ПРОМАХНУЛСЯ, А СО ВТОРОГО ВЫСТРЕЛА ПОРАЗИЛ МИШЕНЬ,

C — СОБЫТИЕ, СОСТОЯЩЕЕ В ТОМ, ЧТО ПЕРВЫЕ ДВА РАЗА СТРЕЛОК ПРОМАХНУЛСЯ, А С ТРЕТЬЕГО ВЫСТРЕЛА ПОРАЗИЛ МИШЕНЬ.

$$P(A) = 0,3.$$

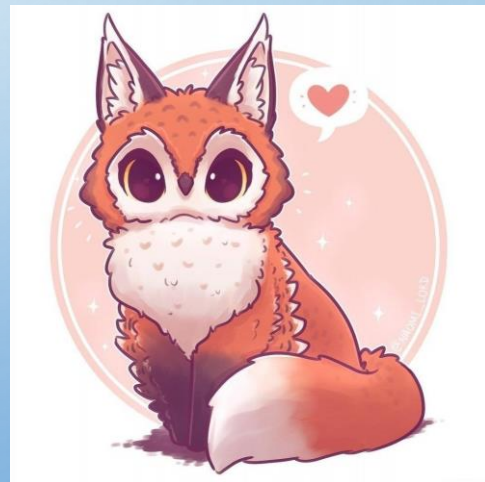
$$P(B) = 0,3 \cdot 0,7 = 0,21.$$

$$P(C) = 0,3 \cdot 0,7 \cdot 0,7 = 0,147.$$

$$P(A + B + C) = P(A) + P(B) + P(C) = 0,3 + 0,21 + 0,147 = 0,657.$$

ОТВЕТ: 0,657.

Стрелок при каждом выстреле поражает мишень с вероятностью 0,3, независимо от результатов предыдущих выстрелов. Какова вероятность того, что он поразит

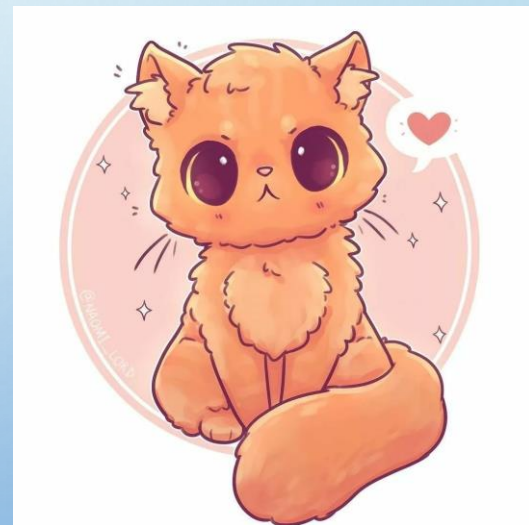


*БИАТЛОНИСТ ПЯТЬ РАЗ СТРЕЛЯЕТ ПО МИШНЯМ. ВЕРОЯТНОСТЬ
ПОПАДАНИЯ В МИШЕНЬ ПРИ ОДНОМ ВЫСТРЕЛЕ РАВНА 0,8.
НАЙДИТЕ ВЕРОЯТНОСТЬ ТОГО, ЧТО БИАТЛОНИСТ ПЕРВЫЕ ТРИ
РАЗА ПОПАЛ В МИШЕНИ, А ПОСЛЕДНИЕ ДВА ПРОМАХНУЛСЯ.*

Поскольку биатлонист попадает в мишени с *РЕЗУЛЬТАТ ОКРУГЛИТЕ ДО СОТЫХ.*
вероятностью 0,8, он промахивается с
вероятностью $1 - 0,8 = 0,2$. События попасть или
промахнуться при каждом выстреле независимы,
вероятность произведения независимых событий
равна произведению их вероятностей. Тем самым
вероятность события «попал, попал, попал,
промахнулся, промахнулся» равна

$$0,8 * 0,8 * 0,8 * 0,2 * 0,2 = 0,02$$

Ответ: 0,02.



ЗАДАЧИ С 2 СТРЕЛКАМИ:

ПУСТЬ ПЕРВЫЙ СТРЕЛОК ПОПАДАЕТ В ЦЕЛЬ С ВЕРОЯТНОСТЬЮ **Q1**, А ВТОРОЙ - С ВЕРОЯТНОСТЬЮ **Q2** (КОНКРЕТНЫЕ ЧИСЛА СМ. В ПРИМЕРАХ НИЖЕ). СООТВЕТСТВЕННО, СРАЗУ МОЖНО СДЕЛАТЬ ВЫВОД, ЧТО ПРОМАХИВАЮТСЯ ОНИ С ВЕРОЯТНОСТЯМИ **Q1=1-P1** и **Q2=1-P2**

ЧТОБЫ ИМЕТЬ ВОЗМОЖНОСТЬ ОПЕРИРОВАТЬ С СОБЫТИЯМИ, НУЖНО СНАЧАЛА ИХ (СОБЫТИЯ) ВВЕСТИ. КСТАТИ, СРАЗУ ЗАМЕТИМ, ЧТО СОБЫТИЯ ЭТИ НЕЗАВИСИМЫЕ (ТО ЕСТЬ ВЕРОЯТНОСТЬ ПОПАДАНИЯ ПЕРВОГО СТРЕЛКА НЕ ЗАВИСИТ ОТ ТОГО, КАК СТРЕЛЯЕТ ВТОРОЙ И НАОБОРОТ). ИТАК, ПУСТЬ:

СОБЫТИЕ A1=(ПЕРВЫЙ СТРЕЛОК ПОПАЛ В ЦЕЛЬ),

СОБЫТИЕ A2 =(ВТОРОЙ СТРЕЛОК ПОПАЛ В ЦЕЛЬ).

СООТВЕТСТВЕННО, СОБЫТИЯ $A1^-$, $A2^-$ ОБОЗНАЧАЮТ ПРОМАХ ПЕРВОГО И ВТОРОГО СТРЕЛКА (НЕ ПОПАЛ В ЦЕЛЬ). СРАЗУ МОЖНО ВЫПИСАТЬ ВСЕ, ЧТО НАМ СТАЛО ИЗВЕСТНО К ЭТОМУ ВРЕМЕНИ О ДАННЫХ СОБЫТИЯХ, В ТЕРМИНАХ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТИ (ТАК СКАЗАТЬ, ФОРМАЛИЗУЕМ ЗАДАЧУ, ЧТОБЫ ЛЕГЧЕ БЫЛО ЕЕ РЕШАТЬ ДАЛЬШЕ):

$$P(A1)=P1$$

$$P(A2)=P2$$

$$P(A1^-)=1-Q1$$

$$P(A2^-)=1-Q2$$

ПРИМЕР:

ДВА СТРЕЛКА, ДЛЯ КОТОРЫХ ВЕРОЯТНОСТИ ПОПАДАНИЯ В МИШЕНЬ РАВНЫ СООТВЕТСТВЕННО 0,7 И 0,8, ПРОИЗВОДЯТ ПО ОДНОМУ ВЫСТРЕЛУ. НАЙТИ ВЕРОЯТНОСТЬ ТОГО, ЧТО МИШЕНЬ ПОРАЖЕНА ТОЛЬКО ОДИН РАЗ.

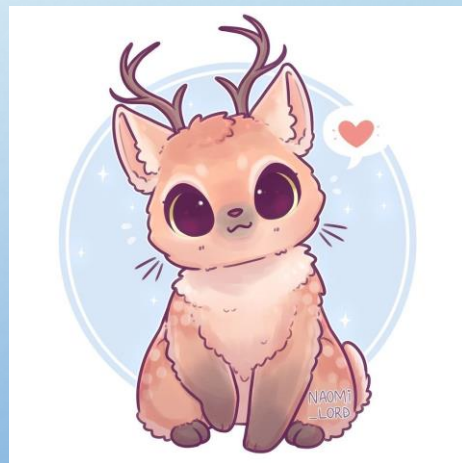
Пусть вероятность, что первый попал $p_1=0.8$; промазал $q_1=1-p_1=0.2$

Вероятность, что второй попал $p_2=0.7$; промазал $q_2=1-p_2=0.3$

Тогда вероятность что в мишень попал только один:

$$P=p_1 * q_2+p_2*q_1=0.8*0.3+0.7+0.2=0.38$$

Ответ:0.38



*ДВА СТРЕЛКА, ДЛЯ КОТОРЫХ
ВЕРОЯТНОСТИ ПОПАДАНИЯ В
МИШЕНЬ РАВНЫ СООТВЕТСТВЕННО
0,7 И 0,8, ПРОИЗВОДЯТ ПО ОДНОМУ
ВЫСТРЕЛУ. НАЙТИ ВЕРОЯТНОСТЬ
ТОГО, ЧТО МИШЕНЬ ПОРАЖЕНА
ДВАЖДЫ.*

Попал первый стрелок: $p_1=0.7$

Попал второй стрелок: $p_2=0.8$

Вероятность, что они оба попадут в мишень:

$$P=p_1 * p_2 = 0.7 * 0.8 = 0.56$$

Ответ: 0.56



ЗАДАЧА С 3 СТРЕЛКАМИ:

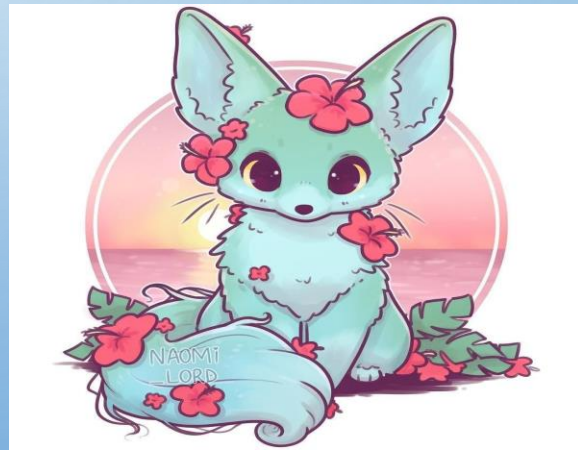
К двум устрелявшимся стрелкам наконец присоединяется третий, бодрый и полный сил. А мы принимаемся за вывод формул. Напомню **общую постановку задачи**: три стрелка, вероятности попаданий в цель которых равны p_1 , p_2 и p_3 , делают по одному выстрелу и подсчитывают число попаданий. Наша задача - вычислить вероятности 1, 2, 3 или ни одного попадания.

Начало одинаковое - формализуем задачу и вводим независимые события:

Событие	A_1	=	(Первый стрелок попал в цель),
Событие	A_2	=	(Второй стрелок попал в цель),
Событие	A_3	=	(Третий стрелок попал в цель).

Известно, что:

$P(A_1)=p_1$, $P(A_2)=p_2$, $P(A_3)=p_3$.



ПРИМЕР:

Три стрелка производят по одному выстрелу. Вероятности попадания 1-го, 2-го и 3-го стрелков соответственно равны: 0,2, 0,3 и 0,4. Найти вероятность получения одного попадания?

ПУСТЬ:

ПЕРВЫЙ СТРЕЛОК ПОПАЛ - $P_1=0,2$, ПРОМАЗАЛ - $Q_1=0,8$

ВТОРОЙ СТРЕЛОК ПОПАЛ - $P_2=0,3$, ПРОМАЗАЛ - $Q_2=0,7$

ТРЕТИЙ СТРЕЛОК ПОПАЛ - $P_3=0,4$, ПРОМАЗАЛ - $Q_3=0,6$

$$P_1 = P_1 \cdot Q_2 \cdot Q_3 + Q_1 \cdot P_2 \cdot Q_3 + Q_1 \cdot Q_2 \cdot P_3 = 0.2 \cdot 0.7 \cdot 0.6 + 0.8 \cdot 0.3 \cdot 0.6 + 0.8 \cdot 0.7 \cdot 0.4 = 0.452$$

ОТВЕТ: 0.452



*3 СТРЕЛКА ДЕЛАЮТ ПО ОДНОМУ
ВЫСТРЕЛУ В МИШЕНЬ. ВЕРОЯТНОСТИ
ПОПАДАНИЯ ДЛЯ КАЖДОГО СТРЕЛКА
СООТВЕТСТВЕННО РАВНЫ 0,8; 0,7; 0,5.
ОПРЕДЕЛИТЕ ВЕРОЯТНОСТЬ ТОГО, ЧТО
В МИШЕНИ ОКАЖЕТСЯ РОВНО 2
ПРОБОИНЫ.*

Вероятность, что первый стрелок попал – $p_1=0.8$;
промазал – $q_1=0.2$

Вероятность, что второй стрелок попал – $p_2=0.7$;
промазал – $q_2=0.3$

Вероятность, что третий стрелок попал – $p_3=0.5$;
промазал – $q_3=0.5$

$$P=p_1*p_2*q_3+p_1*q_2*p_3+q_1*p_2*p_3=0.8*0.7*0.5+0.8*0.3*0.5+0.2*0.7*0.5=0.47$$



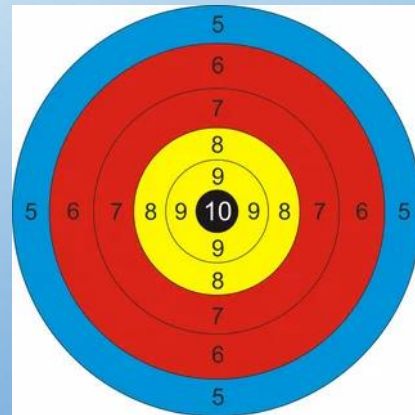
РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ФОРМУЛЫ БЕРНУЛЛИ:

$$P_{k(n)} = C_n^k p^k q^{n-k}$$

- $P_{k(n)}$ - вероятность наступления события k раз в n испытаниях;
- p - вероятность наступления события в одном испытании;
- $q = 1 - p$ - вероятность не наступления события в одном испытании;

ЗАДАЧА 1 (ТИП 5 ИЗ ЕГЭ):

СТРЕЛОК СТРЕЛЯЕТ ПО ОДНОМУ РАЗУ ПО КАЖДОЙ ИЗ ПЯТИ ОДИНАКОВЫХ МИШЕНЕЙ. ВЕРОЯТНОСТЬ ПОРАЗИТЬ МИШЕНЬ КАЖДЫМ ОТДЕЛЬНЫМ ВЫСТРЕЛОМ РАВНА 0,8. ВО СКОЛЬКО РАЗ ВЕРОЯТНОСТЬ СОБЫТИЯ «СТРЕЛОК ПОРАЗИТ РОВНО ЧЕТЫРЕ МИШЕНИ» БОЛЬШЕ ВЕРОЯТНОСТИ СОБЫТИЯ «СТРЕЛОК ПОРАЗИТ РОВНО ТРИ МИШЕНИ»?



РЕШЕНИЕ:

0,8 – ПОПАДАНИЕ В МИШЕНЬ С ПЕРВОГО РАЗА

1-0,8=0,2 – ПРОМАХ

$$P_n(k) = C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k}, \quad q = 1 - p.$$

$$P_5(4) = C_5^4 p^4 q^1 = \frac{5!}{(5-4)! \cdot 4!} \cdot 0,8^4 \cdot 0,2 = 5 \cdot 0,8^4 \cdot 0,2;$$

$$P_5(3) = C_5^3 p^3 q^2 = \frac{5!}{(5-3)! \cdot 3!} \cdot 0,8^3 \cdot 0,2^2 = 10 \cdot 0,8^3 \cdot 0,2^2.$$

– поразит ровно 4
раза
– поразит ровно 3
раза

$$\frac{P_5(4)}{P_5(3)} = \frac{5 \cdot 0,8^4 \cdot 0,2}{10 \cdot 0,8^3 \cdot 0,2^2} = \frac{0,8}{0,4} = 2.$$

Ответ: 2



ЗАДАЧА 2:

СТРЕЛОК СТРЕЛЯЕТ ПО ПЯТИ ОДИНАКОВЫМ МИШЕНЯМ. НА КАЖДУЮ МИШЕНЬ ДАЁТСЯ НЕ БОЛЕЕ ДВУХ ВЫСТРЕЛОВ, И ИЗВЕСТНО, ЧТО ВЕРОЯТНОСТЬ ПОРАЗИТЬ МИШЕНЬ КАЖДЫМ ОТДЕЛЬНЫМ ВЫСТРЕЛОМ РАВНА 0,8. ВО СКОЛЬКО РАЗ ВЕРОЯТНОСТЬ СОБЫТИЯ «СТРЕЛОК ПОРАЗИТ РОВНО ПЯТЬ МИШЕНЕЙ» БОЛЬШЕ ВЕРОЯТНОСТИ СОБЫТИЯ «СТРЕЛОК ПОРАЗИТ РОВНО ЧЕТЫРЕ МИШЕНИ»?

РЕШЕНИЕ:

$0,8+0,2*0,8=0,96$ – ПОПАСТЬ В МИШЕНЬ С ПЕРВОГО ИЛИ ВТОРОГО ВЫСТРЕЛА

$1-0,96=0,04$ – СТРЕЛОК НЕ ПОПАДЁТ В МИШЕНЬ С ДВУХ ВЫСТРЕЛОВ

«СТРЕЛОК ПОРАЗИТ РОВНО ПЯТЬ МИШЕНЕЙ» РАВНА $P_5(5) = 0,96^5$.

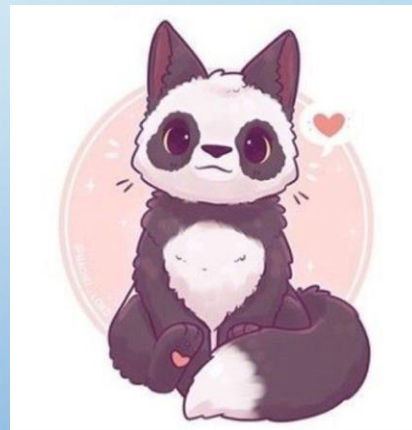
$$P_5(4) = C_5^4 p^4 q^1 = \frac{5!}{(5-4)! \cdot 4!} \cdot 0,96^4 \cdot 0,04 = 5 \cdot 0,96^4 \cdot 0,04.$$

- СТРЕЛОК ПОРАЗИТ РОВНО ЧЕТЫРЕ МИШЕНИ

$$\frac{P_5(5)}{P_5(4)} = \frac{0,96^5}{5 \cdot 0,96^4 \cdot 0,04} = \frac{0,96}{0,2} = 4,8.$$

Ответ: 4,8

- искомое отношение вероятностей



ЗАДАЧА 3:

СТРЕЛОК СТРЕЛЯЕТ ПО ПЯТИ ОДИНАКОВЫМ МИШЕНЯМ. НА КАЖДУЮ МИШЕНЬ ДАЁТСЯ НЕ БОЛЕЕ ДВУХ ВЫСТРЕЛОВ, И ИЗВЕСТНО, ЧТО ВЕРОЯТНОСТЬ ПОРАЗИТЬ МИШЕНЬ КАЖДЫМ ОТДЕЛЬНЫМ ВЫСТРЕЛОМ РАВНА 0,6. ВО СКОЛЬКО РАЗ ВЕРОЯТНОСТЬ СОБЫТИЯ «СТРЕЛОК ПОРАЗИТ РОВНО ПЯТЬ МИШЕНЕЙ» БОЛЬШЕ ВЕРОЯТНОСТИ СОБЫТИЯ «СТРЕЛОК ПОРАЗИТ РОВНО ЧЕТЫРЕ МИШЕНИ»?



РЕШЕНИЕ:

$0,6 + 0,4 \cdot 0,6 = 0,84$ – ПОПАСТЬ В МИШЕНЬ С ПЕРВОГО ИЛИ ВТОРОГО ВЫСТРЕЛА

$1 - 0,84 = 0,16$ – НЕ ПОПАДЁТ В МИШЕНЬ С ДВУХ ВЫСТРЕЛОВ

СТРЕЛОК ПОРАЗИТ РОВНО ПЯТЬ МИШЕНЕЙ $P_5(5) = 0,84^5$

$$P_5(4) = C_5^4 p^4 q^1 = \frac{5!}{(5-4)! \cdot 4!} \cdot 0,84^4 \cdot 0,16 = 5 \cdot 0,84^4 \cdot 0,16.$$

–стрелок
поразит ровно
четыре мишени

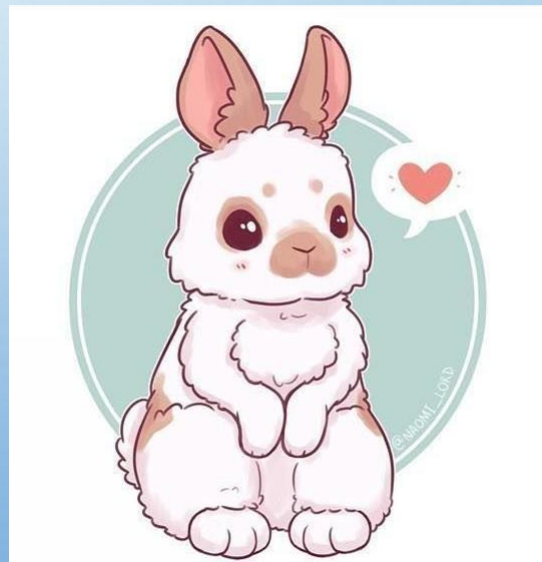
$$\frac{P_5(5)}{P_5(4)} = \frac{0,84^5}{5 \cdot 0,84^4 \cdot 0,16} = \frac{0,84}{0,8} = 1,05.$$

–искомое
отношение
вероятностей

Ответ: 1,05

ЗАДАЧА 4:

СТРЕЛОК В ТИРЕ СТРЕЛЯЕТ ПО МИШЕНИ ДО ТЕХ ПОР, ПОКА НЕ ПОРАЗИТ ЕЁ. ИЗВЕСТНО, ЧТО ОН ПОПАДАЕТ В ЦЕЛЬ С ВЕРОЯТНОСТЬЮ 0,2 ПРИ КАЖДОМ ОТДЕЛЬНОМ ВЫСТРЕЛЕ. КАКОЕ НАИМЕНЬШЕЕ КОЛИЧЕСТВО ПАТРОНОВ НУЖНО ДАТЬ СТРЕЛКУ, ЧТОБЫ ОН ПОРАЗИЛ ЦЕЛЬ С ВЕРОЯТНОСТЬЮ НЕ МЕНЕЕ 0,6?



РЕШЕНИЕ:

ВЕРОЯТНОСТЬ ПОРАЗИТЬ МИШЕНЬ С ПЕРВОГО ВЫСТРЕЛА $= 0,2$.

ВЕРОЯТНОСТЬ ПОРАЗИТЬ МИШЕНЬ СО ВТОРОГО ВЫСТРЕЛА $0,8 \cdot 0,2 = 0,16$

ВЕРОЯТНОСТЬ ПОРАЗИТЬ МИШЕНЬ ЗА ДВА ВЫСТРЕЛА РАВНА $0,2 + 0,16 = 0,36$

ВЕРОЯТНОСТЬ ПОРАЗИТЬ МИШЕНЬ С ТРЕТЬЕГО ВЫСТРЕЛА РАВНА $0,8 \cdot 0,8 \cdot 0,2 = 0,128$

ВЕРОЯТНОСТЬ ПОРАЗИТЬ МИШЕНЬ ЗА ТРИ ВЫСТРЕЛА РАВНА $0,36 + 0,128 = 0,488$.

ВЕРОЯТНОСТЬ ПОРАЗИТЬ МИШЕНЬ С ЧЕТВЕРТОГО ВЫСТРЕЛА РАВНА $0,8 \cdot 0,8 \cdot 0,8 \cdot 0,2 = 0,1024$

ВЕРОЯТНОСТЬ ПОРАЗИТЬ МИШЕНЬ ЗА ЧЕТЫРЕ ВЫСТРЕЛА РАВНА $0,488 + 0,1024 = 0,5904$

ВЕРОЯТНОСТЬ ПОРАЗИТЬ МИШЕНЬ С ПЯТОГО ВЫСТРЕЛА РАВНА
 $0,8 \cdot 0,8 \cdot 0,8 \cdot 0,8 \cdot 0,2 = 0,08192$

ВЕРОЯТНОСТЬ ПОРАЗИТЬ МИШЕНЬ ЗА ПЯТЬ ВЫСТРЕЛОВ РАВНА $0,5904 + 0,08192 = 0,67232$

Эта вероятность превышает 0,6, следовательно, достаточно пяти выстрелов и, соответственно, пяти патронов.

ЗАДАЧА 5:

СТРЕЛОК В ТИРЕ СТРЕЛЯЕТ ПО МИШЕНИ ДО ТЕХ ПОР, ПОКА НЕ ПОРАЗИТ ЕЁ. ИЗВЕСТНО, ЧТО ОН ПОПАДАЕТ В ЦЕЛЬ С ВЕРОЯТНОСТЬЮ 0,4 ПРИ КАЖДОМ ОТДЕЛЬНОМ ВЫСТРЕЛЕ. КАКОЕ НАИМЕНЬШЕЕ КОЛИЧЕСТВО ПАТРОНОВ НУЖНО ДАТЬ СТРЕЛКУ, ЧТОБЫ ОН ПОРАЗИЛ ЦЕЛЬ С ВЕРОЯТНОСТЬЮ НЕ МЕНЕЕ 0,9?



РЕШЕНИЕ:

ВЕРОЯТНОСТЬ ПОПАДАНИЯ В МИШЕНЬ РАВНА 0,4

$1 - 0,4 = 0,6$ – ПРОМАХ

ВЕРОЯТНОСТЬ ПОПАДАНИЯ С N -ГО РАЗА РАВНА

$$1 - 0,6^n \geq 0,9 \Leftrightarrow 0,6^n \leq 0,1.$$

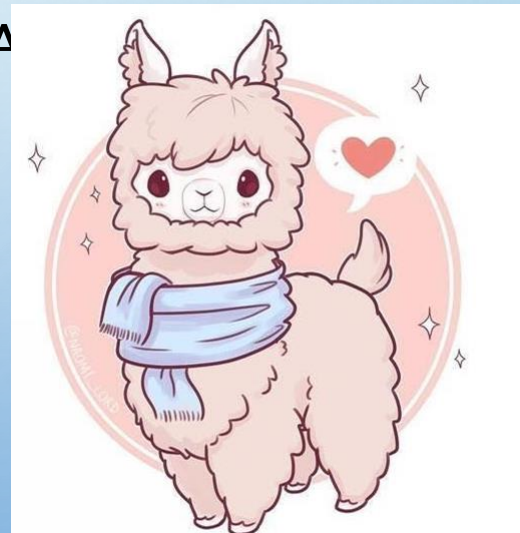
$N = 2$ ПОЛУЧАЕМ $0,6^2 = 0,36$.

ПРИ $N = 3$ ПОЛУЧАЕМ $0,6^3 = 0,216$.

ПРИ $N = 4$ ПОЛУЧАЕМ $0,6^4 = 0,1296$.

ПРИ $N = 5$ ПОЛУЧАЕМ $0,6^5 = 0,07776$.

ТАКИМ ОБРАЗОМ, ОТВЕТ — 5.



СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!

