

# ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТИ И СТАТИСТИКИ. МОНЕТЫ

Выполнили ученицы 10 М класса :

Янкина Виктория

Петровичева Елизавета

Каждый из нас держал в руках монету. На одной стороне (аверсе) российских монет изображен герб Российского государства - двуглавый орёл (впервые орёл на монетах появился при Иване III в конце XV в.). Рисунок на другой стороне (реверсе) в 18-19 веках напоминал решётку, на фоне которой был отчеканен номинал монеты (её достоинство). Поэтому в России стороны монеты традиционно называют «орёл» и «решка».



Для задач о подбрасывании монеты существуют два основных метода решения, один - по формуле классической вероятности (фактически переборный метод, доступный даже школьникам), второй - по формуле Бернулли



Для начала надо вспомнить саму формулу, по которой будем считать. Итак, вероятность находится как  $P = m/n = \text{?} / \text{?}$ , где  $n$  - число всех равновозможных элементарных исходов нашего случайного эксперимента с подбрасыванием  $m$  - число тех исходов, которые благоприятствуют событию (то есть тому, что указано в условии задачи).

## ПРИМЕР 1

*В случайном эксперименте симметричную монету бросают дважды. Найдите вероятность того, что орел выпадет ровно один раз.*

**РР, ОР, РО и ОО**

$$n=4 \blacklozenge ? \quad m=2(\text{ОР и РО})$$

$$P=2/4=1/2=0.5$$

## ПРИМЕР 2

*В случайном эксперименте симметричную монету бросают трижды. Найдите вероятность того, что орел выпадет ровно два раза.*

ООО, ООР, ОРО, ОРР, РОО, РОР, РРО, РРР

$$n=8 \quad m=3(\text{ООР, ОРО, РОО})$$

$$P=m/n=3/8=0.375$$



## ПРИМЕР 3

*В случайном эксперименте симметричную монету бросают трижды. Найдите вероятность того, что орел выпадет все три раза.*

о-о-о, о-р-о, р-о-о, р-р-о, о-о-р, о-р-р,  
р-о-р, р-р-р(8 вариантов)

$$n=8 \quad m=1(\text{о-о-о})$$

$$P=m/n=1/8=0.125$$

## ПРИМЕР 4

*Перед началом футбольного матча судья бросает монетку, чтобы определить, какая из команд начнёт игру с мячом. Команда «Биолог» играет три матча с разными командами. Найдите вероятность того, что в этих матчах команда «Биолог» начнёт игру с мячом все три раза.*

*Решение.* Вероятность начать игру при бросании жребия равна  $1/2$ . Вероятность того, что это событие повторится три раза, по теореме умножения вероятностей (в данном случае трёх) независимых событий равна  $1/2 \cdot 1/2 \cdot 1/2 = 1/8 = 0,125$ .

○ Ответ: 0,125.



## ПРИМЕР 5

*Перед началом футбольного матча судья бросает монетку, чтобы определить, какая из команд начнёт игру с мячом. Команда «Сапфир» играет три матча с разными командами. Найдите вероятность того, что в этих матчах команда «Сапфир» начнёт игру с мячом не более одного раза.*

*Решение.* Обозначим «Р» ту сторону монеты, которая отвечает за выигрыш жребия «Сапфиром», другую сторону монеты обозначим «О». Тогда благоприятных комбинаций четыре: ООО, ООР, ОРО, РОО, а всего комбинаций 8: ООО, ООР, ОРО, ОРР, РОО, РОР, РРО, РРР. Тем самым, искомая вероятность равна:  $\frac{4}{8} = 0,5$ .

## ПРИМЕР 6

*В случайном эксперименте симметричную монету бросают четырежды. Найдите вероятность того, что орёл выпадет ровно два раза.*

**Решение.** Можно составить таблицу и для четырёх бросаний симметричной монеты: число исходов равно 16. Благоприятные исходы в таблице имеют номера: 6,7,8,9,10,11. Их всего 6. Значит, вероятность равна  $6/16 = 3/8 = 0.375$ .

№ исхода	1-е бросание	2-е бросание	3-е бросание	4-е бросание
1	Решка	Решка	Решка	Решка
2	Решка	Решка	Решка	Орёл
3	Орёл	Решка	Решка	Решка
4	Решка	Орёл	Решка	Решка
5	Решка	Решка	Орёл	Решка
6	Решка	Решка	Орёл	Орёл
7	Орёл	Орёл	Решка	Решка
8	Орёл	Решка	Решка	Орёл
9	Решка	Орёл	Орёл	Решка
10	Решка	Орёл	Решка	Орёл
11	Орёл	Решка	Орёл	Решка
12	Решка	Орёл	Орёл	Орёл
13	Орёл	Решка	Орёл	Орёл
14	Орёл	Орёл	Решка	Орёл
15	Орёл	Орёл	Орёл	Решка
16	Орёл	Орёл	Орёл	Орёл

# Формула Бернулли

- Вероятность того, что при  $n$  испытаниях
- событие  $A$  наступит  $k$ -раз:

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}$$

где  $C_n^k$  – число сочетаний

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

## ПРИМЕР 7

По ф. Бернулли:

В условиях нашей задачи  $p = 1/2$ ,  $q = 1 - 1/2 = 1/2$

$$C_n^k = C_4^2 = \frac{4!}{(4-2)!2!} = 6.$$

Подставляем в формулу и получаем:

$$P_4(2) = 6 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 0,375.$$

## ПРИМЕР 8

*Перед началом футбольного матча судья бросает монетку, чтобы определить, какая из команд начнёт игру с мячом. Команда «Химик» играет три матча с разными командами. Найдите вероятность того, что в этих играх «Химик» выиграет жребий ровно два раза.*

*Решение.* Обозначим «Р» ту сторону монеты, которая отвечает за выигрыш жребия «Химика», другую сторону монеты обозначим «О». Тогда благоприятных комбинаций три: РРО, РОР, ОРР, а всего комбинаций 8: ООО, ООР, ОРО, ОРР, РОО, РОР, РРО, РРР. Тем самым, искомая вероятность равна:  $\frac{3}{8} = 0,375$ .

## ПРИМЕР 9

*Симметричную монету бросают 16 раз. Во сколько раз вероятность события «выпадет ровно 8 орлов» больше вероятности события «выпадет ровно 7 орлов»?*

*Решение.* По ф. Бернулли найдём вероятность события А (при 16 бросаниях выпадет ровно 8 орлов):

$$P(A) = C_{16}^8 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^8 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^8 = \frac{16!}{8! \cdot 8!} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{16}$$
$$C_{16}^8 = \frac{16!}{8! \cdot (16-8)!} = \frac{16!}{8! \cdot 8!}$$

## ПРИМЕР 9

Аналогично найдем вероятность события В (при 16 бросаниях выпадет ровно 7 орлов):

$$P(B) = C_{16}^7 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^7 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^9 = \frac{16!}{7! \cdot 9!} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{16}$$
$$C_{16}^7 = \frac{16!}{7! \cdot (16-7)!} = \frac{16!}{7! \cdot 9!}$$

Тогда:

$$\frac{P(A)}{P(B)} = \frac{\frac{16!}{8! \cdot 8!} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{16}}{\frac{16!}{7! \cdot 9!} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{16}} = \frac{16!}{8! \cdot 8!} \cdot \frac{7! \cdot 9!}{16!} = \frac{7! \cdot 9!}{8! \cdot 8!} = \frac{9}{8} = 1,125$$

⦿ Ответ: 1,125



## ПРИМЕР 10

*В случайном эксперименте симметричную монету бросают трижды. Найдите вероятность того, что орел не выпадет ни разу.*

Подставляем  $n=3, k=0$  и получаем

$$P = C_3^0 \cdot (1/2)^3 = 1 \cdot 1/8 = 1/8 = 0.125$$

## ПРИМЕР 11

*В случайном эксперименте симметричную монету бросают дважды. Найдите вероятность того, что орел выпадет ровно один раз.*

$n=2, k=1$  и получаем

$$P = C_2^1 \cdot (1/2)^2 = 2 \cdot 1/4 = 1/2 = 0.5$$